



Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2013

**Érica Nídia Teixeira
Pimenta**

**TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO PARA PROMOVER A
COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA**



**Érica Nídia Teixeira
Pimenta**

**TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO PARA PROMOVER A
COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA**

Relatório Final apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino dos 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, realizado sob a orientação científica da Doutora Celina Tenreiro-Vieira, Professora Auxiliar Convidada do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

o júri

Presidente

Professora Doutora Filomena Rosinda de Oliveira Martins
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Sandra Maria Oliveira Ferrão Lopes
Professora do Quadro do Agrupamento da Escola Secundária de Seia

Professora Doutora Maria Celina Cardoso Tenreiro Vieira
Professora Auxiliar Convidada da Universidade de Aveiro (Orientadora)

Agradecimentos

Um agradecimento especial à Doutora Celina Tenreiro-Vieira pela sua disponibilidade, profissionalismo, paciência e apoio incansável ao longo da realização deste estudo. Agradeço, ainda, o facto de ter acompanhado o meu trabalho com “feedbacks” pertinentes e atempados.

Aos meus pais, porque sem eles este trabalho não seria possível. Obrigada por estarem incluídos em todos os projetos alcançados na minha vida.

Ao Fábio Ribeiro, colega de estágio e, acima de tudo um grande amigo, que contribuiu, em grande parte, na realização deste estudo, pela sua paciência, motivação e bom humor. Uma caminhada caracterizada por momentos que ficarão na nossa memória.

Uma palavra de agradecimento à professora titular da turma, Fátima Neiva, pela sua compreensão, disponibilidade, colaboração e acima de tudo pela sua receptividade positiva ao projeto em causa.

Aos meus alunos que participaram neste estudo. Agradeço o vosso empenho e dedicação na colaboração “para o sucesso da investigação da professora”.

À Helena pela colaboração na revisão deste trabalho. Não existem palavras para descrever a minha gratidão e admiração por si.

A duas pessoas que me acompanharam de uma forma especial, durante esta longa viagem: Maria Corujo e Tânia Cunha. Obrigada amigas, pela vossa “companhia”.

A todos, familiares, amigos, colegas e professores, que me ajudaram, diretamente ou indiretamente, na realização desta investigação, sem os quais não seria possível a sua concretização.

Um bem-haja a todos.

palavras-chave

Educação Matemática, Comunicação Matemática, Tarefas de Investigação.

Resumo

A implementação de tarefas matemáticas estimulantes e desafiantes, em contexto sala de aula, encoraja os alunos a defender os seus pontos de vista e a centrar os seus discursos nas ideias matemáticas, permitindo o desenvolvimento da comunicação matemática, sendo este um processo, fundamentalmente, relacionado com a aprendizagem matemática dos alunos (NCTM, 2007 e Cabrita *et al.*, 2010).

Tendo em conta que a promoção da comunicação matemática e a implementação de tarefas de investigação, nas aulas de matemática, são duas das recomendações das orientações curriculares no ensino português, concebeu-se o presente estudo, de modo contribuir para uma aprendizagem mais aprofundada da matemática dos alunos. Posto isto, a investigação assentou em duas finalidades i) selecionar e reformular tarefas de investigação para promover explicitamente capacidades de comunicação matemática de alunos do 1º ciclo do ensino básico e ii) implementar as tarefas de investigação reformuladas no contexto das aulas de matemática e avaliar os seus contributos para promover capacidades de comunicação matemática de alunos do 1º ciclo do ensino básico.

O estudo assume uma perspetiva orientada para a prática, baseada num plano de investigação-ação, numa turma com 24 alunos, do 3.º ano de escolaridade do 1º ciclo do ensino básico. Como forma de recolher dados socorreu-se a diversos instrumentos: (i) diário da aluna estagiária investigadora, (ii) produções escritas e orais dos alunos no âmbito da realização de tarefas de investigação e (iii) questionário. Os dados foram submetidos a uma análise de conteúdo.

Os resultados obtidos sugerem uma contribuição das tarefas de investigação implementadas no desenvolvimento de capacidades de comunicação matemática dos alunos, nas representações dos alunos sobre o seu desempenho e na opinião dos mesmos sobre as aulas de matemática em que realizaram tarefas de investigação orientadas para o promover as suas capacidades de comunicação matemática.

As tarefas de investigação implementadas, orientadas para o uso de capacidades de comunicação matemática, poderão apoiar os professores na promoção do desenvolvimento de capacidades de comunicação matemática dos alunos.

Keywords

Mathematical Education, Mathematical Communication, Investigation Tasks

Abstract

The carrying out of stimulating and challenging tasks in the classroom encourages students to defend their point of view and focus their speech on mathematical ideas allowing the development of mathematical communication, process, fundamentally, related to students learning mathematics (NCTM, 2007 and Cabrita *et al.*, 2010).

The promotion of mathematical communication and approach of investigation tasks, in maths classes, are two of the purposes of curricular guidelines in teaching Portuguese. The present study was conceived in order to contribute to a deeper learning of mathematics by students. The research was based on two purposes i) to select and improve investigation tasks to explicitly promote communication skills in maths for beginners (students of the third level of education) and ii) to apply the improved investigation tasks in the context of maths classes and to evaluate their contribution to promote maths communication skills in beginners (students of the third level of education).

The study takes a practice-oriented methodology, based on action-inquiry in a class of 24 students of the third level of basic education. To collect data, several instruments were used: (i) daily records of intern-student researcher, (ii) written and oral productions of the students in the completion of five worksheets and (iii) questionnaire. Afterwards, the data was subjected to content analysis.

The results indicated a contribution of improved investigation tasks to the development of mathematical communication skills of students, to the representations of students about their performance and their opinion on maths classes in which they performed the investigation tasks oriented to promote their communication skills mathematics.

The improved investigation tasks, oriented towards the use of maths communication skills, may support teachers in developing educational practices that promote mathematical communication skills in students.

Índice Geral

Lista de Siglas.....	III
Índice de Tabelas	IV
Índice de Quadros	V
Índice de Figuras	VI
Apresentação	VIII
Capítulo I - Introdução	
1.1 Justificação do tema.....	2
1.2 Finalidades e questões do estudo	3
1.3 Importância do estudo.....	4
Capítulo II - Revisão de Literatura	
2.1 A educação matemática e o currículo de matemática do ensino básico	8
2.1.1 Perspetivas e orientações curriculares nos inícios do século XXI.....	8
2.1.2 Programa de matemática para o ensino básico	13
2.2 Comunicação matemática	16
2.2.1 Concetualizações e definições	16
2.2.2 Promover a comunicação matemática: como e porquê?.....	20
2.3 Tarefas de Investigação na aula de matemática	24
2.3.1 Definições e concetualizações	25
2.3.2 Orientações para a ação do professor.....	28
Capítulo III - Metodologia	
3.1 Opções metodológicas	34
3.2 Caracterização do Agrupamento/Escola e dos participantes no estudo.....	37
3.3 Descrição do estudo	41
3.3.1 Seleção e reformulação de tarefas de investigação.....	41
3.3.2 Planificação das sessões.....	43
3.3.2.1 Momentos base na organização do trabalho investigativo em sala de aula	43
3.3.2.2 Elaboração do Guião da aluna estagiária investigadora	46
3.3.3 Implementação das sessões.....	48
3.3.3.1 Calendarização	48
3.3.3.2 Descrição de cada uma das sessões implementadas pela AEI.....	48
3.4 Recolha de dados.....	62

3.4.1	Diário da aluna estagiária investigadora.....	63
3.4.2	Instrumentos de análise das produções dos alunos.....	64
3.4.3	Questionário.....	65
3.5	Análise dos dados	68
Capítulo IV - Resultados		
4.1	Contributo das tarefas de investigação orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM dos alunos	72
4.1.1	Vertente escrita	72
4.1.2	Vertente oral	91
4.2	Representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito das tarefas de investigação realizadas	97
4.3	Opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram tarefas de investigação orientadas para o promover as suas capacidades de CM	100
Capítulo V - Conclusões		
5.1	Conclusões do estudo.....	106
5.2	Limitações da investigação	110
5.3	Sugestões para futuras investigações	110
5.4	Considerações finais	111
Apêndices		113
Apêndice A – Guião da aluna estagiária investigadora		114
Apêndice B – Fichas de trabalho do aluno		138
Apêndice C – Questionário		151
Apêndice D – Instrumento de análise das produções orais dos alunos no contexto das sessões 2, 3 e 4		154
Apêndice E – Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da realização das FTA		156
Apêndice F – Convenções utilizadas na transcrição das gravações		162
Apêndice G – Transcrição da gravação áudio do momento da apresentação e discussão do trabalho desenvolvido – sessão 2		164
Apêndice H – Apresentação em <i>PowerPoint</i> usada na sessão 2		181
Referências Bibliográficas		183

Lista de Siglas

AEI – Aluna Estagiária Investigadora

APM – Associação de Professores de Matemática

CEB – Ciclo do Ensino Básico

CIMEM - Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática

CM – Comunicação Matemática

FTA – Ficha de Trabalho do Aluno

GAEI – Guião da Aluna Estagiária Investigadora

I-A – Investigação Ação

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

PCT – Projeto Curricular de Turma

PISA – Programme for International Student Assessment

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

PPS B2 – Prática Pedagógica Supervisionada B2

PTT – Professora Titular da Turma

TI – Tarefa de Investigação

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Mobilização de capacidades de CM pelos alunos por sessão: frequência absoluta e relativa.....	74
Tabela 2 - Representações dos alunos acerca do seu desempenho nas TI realizadas individualmente: frequência absoluta e relativa.....	97
Tabela 3 - Representações dos alunos acerca do seu desempenho nas TI realizadas em grupo: frequência absoluta e relativa	98
Tabela 4 - Opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI: frequência absoluta e relativa.....	100
Tabela 5 - Opinião dos alunos sobre o seu desempenho global nas aulas de matemática em que realizaram TI: frequência absoluta e relativa	103

Índice de Quadros

Quadro 1 - Capacidades de CM	42
Quadro 2 - Designação, tema(s) e objetivo(s) de cada TI seleccionada e reformulada	46
Quadro 3 - Capacidades de CM a desenvolver com a realização das TI	47
Quadro 4 - Calendarização das sessões	48

Índice de Figuras

Figura 1 - Diferentes tipos de linguagem matemática	17
Figura 2 - Diferenciação entre os diversos tipos de tarefas matemáticas (Ponte, 2010)....	25
Figura 3 - Momentos caraterísticos de uma TI (Ponte, 2003a, p.7)	27
Figura 4 - Planificação do estudo	36
Figura 5 - Organização da sala da turma do 3º ano de escolaridade	38
Figura 6 - Técnicas e instrumentos utilizados na recolha de dados e respetivo momento de aplicação.....	62
Figura 7 - Resposta de A13 ao item 3 da tarefa 1	76
Figura 8 - Resposta de A2 ao item 4 da tarefa 2	77
Figura 9 - Resposta de A6 ao item 4 da tarefa 2	77
Figura 10 - Resposta de A11 ao item 1 da tarefa 3	77
Figura 11 - Resposta de A7 ao item 2 da tarefa 4	78
Figura 12 - Resposta de A10 ao item 7b da tarefa 4	78
Figura 13 - Resposta de A13 ao item 2 da tarefa 5	79
Figura 14 - Resposta de A6 ao item 3 da tarefa 5	79
Figura 15 - Resposta de A23 ao item 4 da tarefa 1	80
Figura 16 - Resposta de A5 ao item 3 da tarefa 2	80
Figura 17 - Resposta de A21 ao item 1 da tarefa 3	81
Figura 18 - Resposta de A8 ao item 5 da tarefa 4	81
Figura 19 - Resposta de A23 ao item 4 da tarefa 5	81
Figura 20 - Resposta de A12 ao item 2 e 3 da tarefa 1	82
Figura 21 - Resposta de A24 ao item 2 da tarefa 2	83
Figura 22 - Resposta de A20 ao item 4 da tarefa 3	83
Figura 23 - Resposta de A16 ao item 3 da tarefa 3	84
Figura 24 - Resposta de A18 ao item 4 da tarefa 4	84
Figura 25 - Resposta de A21 ao item 6 da tarefa 4	85
Figura 26 - Resposta de A11 ao item 1 da tarefa 5	85
Figura 27 - Resposta de A17 ao item 3 da tarefa 5	86
Figura 28 - Resposta de A11 ao item 4 da tarefa 1	86
Figura 29 - Resposta de A13 ao item 4 da tarefa 2	87
Figura 30 - Resposta de A10 ao item 3 da tarefa 3	87

Figura 31 - Resposta de A23 ao item 7a da tarefa 4.....	88
Figura 32 - Resposta de A14 ao item 6 da tarefa 5	88
Figura 33 - Resposta de A21 ao item 2 da tarefa 1	88
Figura 34 - Resposta de A12 ao item 2 da tarefa 2	89
Figura 35 - Resposta de A5 ao item 1 da tarefa 3	89
Figura 36 - Resposta de A19 ao item 4 da tarefa 4	90
Figura 37 - Resposta de A12 ao item 2 da tarefa 5	90

Apresentação

A área da matemática é encarada por muitos alunos portugueses como uma das mais complexas, desde os primeiros anos de escolaridade (Ponte 2003b). A este nível, é fundamental que os alunos, desde o início do seu percurso escolar, no âmbito das aulas de matemática, sejam capazes de aplicar conteúdos e processos matemáticos NCTM (2007). Ponte (2008) acrescenta que deve ser valorizado o espírito crítico e a autonomia dos alunos ao nível da enfatização de tarefas de investigação [TI] e do desenvolvimento da comunicação matemática [CM].

O presente Relatório Final encontra-se organizado em cinco capítulos. No primeiro apresenta-se a justificação do tema, as finalidades e as questões de investigação, assim como a importância do estudo. O segundo capítulo diz respeito à revisão de literatura, encontrando-se organizado em três pontos. Num primeiro ponto referem-se perspetivas e orientações curriculares, relativas à matemática escolar que emergiram no início do século XXI, salientando-se o caso português, tendo por referência, em particular, o Programa de Matemática do Ensino Básico [PMEB] (Ponte *et al.*, 2007). O segundo ponto foca conceitualizações e definições de diferentes autores acerca da CM e sobre o *Porquê* e o *Como* promover a CM em contexto sala de aula. No terceiro ponto destacam-se definições e conceitualizações das TI e diversas orientações para a ação do professor no âmbito da implementação de TI para promover a CM dos alunos. O capítulo três diz respeito à metodologia do estudo e foi organizado em 5 pontos. No primeiro apresentam-se as opções metodológicas. O segundo ponto centra-se na caracterização do agrupamento/escola e dos participantes no estudo. No terceiro faz-se a descrição do estudo, de acordo com as diferentes fases do mesmo. No quarto ponto apresentam-se as técnicas e os instrumentos de recolha de dados usados. O último ponto diz respeito à análise dos dados recolhidos. O capítulo quatro reporta à apresentação dos resultados, encontrando-se organizado em função das questões de investigação formuladas. Primeiramente, apresentam-se os resultados referentes à questão: Qual o contributo das TI orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM dos alunos i) na vertente escrita? e ii) na vertente oral? Depois, relatam-se os resultados referentes à questão: Quais as representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação de TI? Por fim, apresentam-se os resultados relativos à questão: Qual a opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI orientadas para o

promover as suas capacidades de CM? No quinto capítulo referem-se as principais conclusões. Apontam-se limitações do estudo, bem como possíveis sugestões para futuras investigações. Neste capítulo referem-se, ainda, considerações finais sobre o trabalho desenvolvido. Este capítulo é seguido pela apresentação dos apêndices e das referências bibliográficas.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O presente capítulo encontra-se organizado em três pontos. O primeiro apresenta a justificação do tema do estudo. No segundo ponto definem-se as finalidades e as questões que orientaram a investigação. O terceiro ponto explicita a importância deste estudo.

1.1 Justificação do tema

O presente estudo teve em consideração o enunciado em documentos de organismos de referência internacional, como é o caso, em particular, do *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2007), de organismos nacionais como a Associação de Professores de Matemática [APM], bem como o documento de orientação curricular o PMEB (Ponte *et al.*, 2007) e, ainda em posições assumidas por diversos investigadores em Educação em Matemática. É de realçar que no decurso da realização do estudo foram publicados normativos e documentos de orientação curricular, em Portugal, tais como, o decreto publicado em 2011 que dá por finda a aplicação do Currículo Nacional do Ensino Básico e, em 2012, o documento referente às metas curriculares de matemática que substitui o publicado em 2010, que não foram considerados no presente estudo. Isto, porque aquando da sua publicação estar em desenvolvimento o estudo, incluindo a intervenção no âmbito do mesmo.

As recomendações para o ensino e a aprendizagem da matemática, quer a nível internacional, quer a nível nacional, consideram que é fundamental diversificar o tipo de tarefas de aprendizagem a apresentar em contexto sala de aula, de forma a permitir o desenvolvimento de três capacidades transversais: CM, resolução de problemas e raciocínio matemático.

No caso concreto do PMEB (Ponte *et al.*, 2007) é expresso que o aluno deve ter oportunidade de viver diversos tipos de experiências matemáticas, entre as quais, realizar TI. De acordo com Ponte (2010), as TI caracterizam-se por serem de carácter aberto, constituindo, deste modo, um desafio mais elevado para os alunos, em comparação com outro tipo de tarefas matemáticas. Salienta, ainda, que as TI promovem um grande envolvimento dos alunos, proporcionando aos mesmos uma visão alargada desta ciência e o desenvolvimento de capacidades matemáticas.

Também no PMEB (Ponte *et al.*, 2007) são definidas três capacidades transversais. Dada a relevância que tem sido reconhecida às capacidades transversais no processo de ensino e aprendizagem da matemática, no presente estudo optou-se por focar uma delas,

concretamente, a CM. O número de estudos realizados no âmbito da CM é mais reduzido relativamente aos estudos realizados no campo das outras duas capacidades transversais. Todavia, a investigação no âmbito da CM, nos últimos anos, tem registado um assinalável incremento.

O desenvolvimento de capacidades de CM é uma vertente fundamental a promover nas práticas educativas (NCTM, 2007, Menezes, 2010, Souza e Ponte, 2012), assim como a realização de TI, na medida em que permite o envolvimento ativo do aluno, sendo esta uma condição elementar da aprendizagem matemática (Ponte *et al.*, 2006). Decorrente do exposto, no presente estudo, pretendeu-se promover capacidades de CM dos alunos, no âmbito da realização de TI orientadas para o desenvolvimento da CM. É fundamental atribuir um papel ativo aos alunos na construção dos seus significados, pois como afirmam Boavida e Menezes (2012), em muitas aulas, não apenas em Portugal, “continua a predominar um ensino da Matemática baseado na metáfora da transmissão e em que ao aluno se atribui o mero papel de memorizar ideias, técnicas e procedimentos mesmo que não lhes atribua significado nem compreenda a sua razão de ser” (p. 288).

1.2 Finalidades e questões do estudo

Recomendações para o ensino da matemática, para os vários níveis de ensino, salientam que a incorporação de diferentes tarefas, concretamente, TI, em contexto de sala de aula, incita os alunos a desenvolver capacidades matemáticas, entre as quais a CM (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007 e Henriques e Ponte, 2010). Porém, as mudanças educativas propostas pelos diversos organismos só são garantidas, em grande medida, se os alunos tiverem a oportunidade de realizar diferentes tipos de tarefas, entre as quais, as TI.

Nesta perspetiva, para que tal situação seja efetivada, é de extrema relevância o apelo a capacidades de CM, desde os primeiros anos de escolaridade, no âmbito da realização de TI orientadas para a mobilização de capacidades de CM.

Nesta sequência, o desenvolvimento desta investigação teve como principais finalidades:

- i) Selecionar e reformular TI para promover explicitamente capacidades de CM de alunos do 1º CEB [Ciclo do Ensino Básico].
- ii) Implementar as TI reformuladas no contexto das aulas de matemática e avaliar os seus contributos para promover capacidades de CM de alunos do 1º CEB.

Decorrente das finalidades, as questões a que se pretende dar resposta neste estudo são:

- 1) Qual o contributo das TI, orientadas para a CM, na promoção de capacidades de CM dos alunos:
 - 1.1 na vertente escrita?
 - 1.2 na vertente oral?
- 2) Quais as representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação de TI?
- 3) Qual a opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI orientadas para o promover as suas capacidades de CM?

1.3 Importância do estudo

Os cidadãos devem ser capazes de pensar e raciocinar matematicamente, bem como de construir conhecimentos e procedimentos, que lhes permitam acompanhar as constantes e aceleradas mudanças impostas pela sociedade (NCTM, 2007). Sobre este assunto, Brocardo (2001) considera que é importante, “que todos os alunos tenham uma formação matemática que lhes permita interpretar, analisar e intervir criticamente numa sociedade cada vez mais matematizada” (p.11).

Vários estudos, entre eles, Cunha *et al.* (1995), Ernest (1996), Oliveira *et al.* (1997), Brocardo (2001), Diezmann, *et al.* (2001), Henriques e Ponte (2008) e Frota (2005), evidenciam a importância de integrar tarefas desafiantes, nomeadamente, as investigações, nas aulas de matemática, por diferentes motivos: constituem uma parte essencial da atividade matemática, favorecem o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem e podem ser trabalhadas por alunos de ciclos diferentes.

A comunicação de ideias e resultados é um aspeto importante quando se realiza TI na sala de aula. No estudo de Diezmann *et al.* (2001) constata-se que apesar das crianças terem conseguido realizar as investigações propostas, revelaram dificuldades em comunicar as suas ideias, quer por escrito, quer oralmente. De acordo com o autor, as crianças tendem a atribuir um papel insignificante ao registo de estratégias durante a realização de TI, limitando-se apenas a mencionar os resultados finais.

Decorrente do exposto, é fundamental proporcionar aos alunos TI, e simultaneamente, criar condições de promoção de capacidades de CM, de modo a que os alunos superem dificuldades como as referidas anteriormente. Nesta sequência, e uma vez que esta investigação decorreu em contexto de Prática Pedagógica Supervisionada B2 [PPS B2], do Mestrado do Ensino dos 1.º e 2.º CEB, foram implementadas cinco TI orientadas para a promoção de capacidades de CM de alunos do 3.º ano de escolaridade.

Ainda que a maioria dos investigadores, na área da Matemática, assim como as orientações curriculares, recomendem a integração de tarefas de investigações e o desenvolvimento de capacidades de CM, no ensino e aprendizagem da matemática, escasseiam situações a estes níveis, em contexto de sala de aula (Brocardo, 2001).

Nesta conjectura, este estudo torna-se relevante para os professores que pretendem atender aos novos desafios do PMEB, e simultaneamente, “modificar” as práticas educativas, em concreto, no desenvolvimento de práticas educativas promotoras de capacidades de CM dos alunos e exploração de investigações matemáticas. A implementação de tarefas de investigação em contexto de sala de aula, no 1º CEB é uma prática letiva muito pouco habitual, dado que requer um trabalho prévio do professor para a implementação das mesmas (Fonseca *et al.*, 1999; Porfírio e Oliveira, 1999; Ponte *et al.*, 2006). Posto isto, este estudo pode servir para orientar/apoiar o professor do 1º CEB, aquando da implementação de tarefas de investigação, bem como auxiliar na promoção da comunicação matemática. A CM deve ser promovida em sala de aula, sendo, para tal, necessário criar oportunidades explícitas para promover capacidades de CM.

A relevância deste estudo passa, também, pelo seu contributo na área da investigação, nomeadamente, na educação matemática. Como referido na justificação do tema, os estudos efetuados no âmbito deste tema, ao nível do 1º CEB, são reduzidos. Esta razão torna-se, assim, um aspeto de justificação do tema e em simultâneo, um motivo que reforça a importância do estudo.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo está estruturado em três pontos. O primeiro reporta à educação matemática e ao PMEB. O segundo ponto enfatiza a CM. Por último, no ponto três, focam-se aspetos acerca das TI, no âmbito das aulas de matemática.

2.1 A educação matemática e o currículo de matemática do ensino básico

Neste ponto começa-se por apresentar perspetivas e orientações curriculares, sobre a matemática escolar que emergiram no início do século XXI, depois analisa-se o caso português focando o PMEB (Ponte *et al.*, 2007).

2.1.1 Perspetivas e orientações curriculares nos inícios do século XXI

Há em relação à educação, à Escola e ao ensino, e, portanto, também relativamente ao ensino da Matemática, o sentimento de que vivemos uma situação de crise. (Guimarães, 2003, p. 89)

Reportando ao início do séc. XXI, no contexto do seminário *O Ensino da Matemática: Situação e Perspetivas*, realizado em 2002, sob organização do conselho Nacional de Educação, foram discutidas perspetivas defendidas por diferentes autores, nacionais e internacionais, acerca da Matemática escolar.

No seminário supramencionado, Ponte (2003b) evidencia diversos indicadores relativos aos resultados insatisfatórios das aprendizagens dos alunos portugueses em matemática. Um deles refere-se aos resultados preocupantes obtidos pelos alunos portugueses no *Programme for International Student Assessment* [PISA] (estudo internacional sobre a literacia matemática, científica e de leitura, de jovens com 15 anos), na área de matemática, em particular, no que diz respeito às tarefas de ordem mais complexa – nível 3. Na área da matemática, os alunos são avaliados em diversas tarefas organizadas por diferentes níveis de dificuldade: nível 1 – reprodução, definições e cálculos; nível 2 – conexões e integração para a resolução de problemas; nível 3 – matematização, pensamento matemático, generalização e perspicácia.

No mesmo seminário, para explicar os resultados, preocupantes, no PISA e a generalidade do insucesso da matemática dos alunos portugueses, foram apontadas razões relacionadas com os programas curriculares em vigor, à data do seminário. Nesta linha, Ponte (2003b) considera que uma das razões tem a ver com a insuficiente prática por parte

dos professores do mencionado nas orientações curriculares, em concreto, nos programas de 1990 (1º ciclo) e 1991 (2º ciclo) e Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (2001)). Outra razão destacada por Ponte (2003b) e Guimarães (2003) refere-se ao caráter difuso e indefinido das finalidades para o ensino da matemática, no que toca aos programas de 1990 (1º ciclo) e 1991 (2º ciclo).

No seminário, em questão, foram apresentadas diversas soluções para combater o insucesso evidenciado pelos alunos na área da matemática. A este nível, Ponte (2003b) considera que os programas curriculares deveriam passar por um processo de clarificação das finalidades do ensino básico da matemática e de indicação de expectativas claras e positivas pretendidas para os alunos.

Segundo Ponte (2003b), Sá (2003) e Sanchez (2003), um programa curricular deve possuir indicações claras e precisas dos conteúdos a lecionar, porém deve conceder aos professores liberdade de ensinar segundo estratégias que lhes pareçam mais adequadas às características dos alunos e das aulas, respeitando assim o campo de ação pedagógica. O primeiro autor sublinha, ainda, que todos os documentos de natureza curricular, elaborados sob a tutela do Ministério da Educação, devem ser objeto de uma escrita muito cuidada, dado que visam exigir o melhor desempenho do pessoal docente.

Por sua vez, Sá (2003) e Reis (2003) defendem que os professores devem fortalecer a aproximação da disciplina de matemática aos conteúdos de outras disciplinas, pois são contra o isolamento da Matemática como disciplina.

Tendo em conta recomendações e orientações provenientes de organizações internacionais e nacionais (no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática) e pontos de vista de investigadores portugueses na área da educação matemática, verificou-se uma necessidade em reformular/elaborar novos documentos de orientação curricular para o sistema educativo português, sendo efetivada na elaboração do PMEB em 2007, por Ponte e seus colaboradores.

Assim sendo, este documento de natureza curricular português foi elaborado, essencialmente, de acordo com linhas orientadoras do organismo de referência internacional, o NCTM. No documento *Princípios e normas para a matemática escolar* (NCTM, 2007), são mencionadas dez normas baseadas em descrições daquilo que o ensino da matemática deverá permitir aos alunos fazer e saber. As normas estão expressas em normas de conteúdo: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; Análise de

dados e Probabilidades; e em normas de processo: Resolução de Problemas; Raciocínio e Demonstração; Comunicação; Conexões; Representação. As primeiras incidem nos conteúdos que os alunos devem aprender em cada nível de escolaridade, enquanto as segundas mencionam formas de adquirir e usar os conhecimentos relativos aos conteúdos.

As normas de processo são amplamente focadas pelo NCTM (2007), dada a sua relevância na formação matemática de todos os alunos. Tendo em consideração a essência deste estudo, de seguida, destacam-se as normas de processo dando conta do que se entende por cada processo, de acordo com o NCTM.

A *Resolução de problemas* é um dos processos matemáticos focados no documento *Princípios e normas para a matemática escolar* (NCTM, 2007). No contexto das normas este processo pode ser considerado como meio e fim, atendendo à sua dupla função:

Levar à compreensão e domínio do conteúdo matemático: a resolução de problemas sustenta o contexto em que se aprendem conceitos e se desenvolvem capacidades;

Favorecer a capacidade de resolver problemas: a resolução de problemas sustenta o desenvolvimento da capacidade de usar processos cognitivos; e domínio afectivo inerentes à “boa” resolução de problemas (Correia, 2005, p. 39)

No mesmo documento (*Princípios e normas para a matemática escolar*) o *Raciocínio* e a *Demonstração* são processos matemáticos que “constituem formas poderosas de desenvolver e expressar intuições sobre uma vasta gama de fenómenos” (NCTM, 2007, p. 61). Este organismo acrescenta, ainda, que o *Raciocínio* é fundamental para a compreensão da matemática. Por sua vez, a *Demonstração* é um modo formal de expressar determinados tipos de raciocínio e justificações matemáticas. Boavida e Menezes (2012) referem que o raciocínio não está apenas relacionado com a demonstração de algo, mas também com i) a apresentação de razões para justificar ideias ou posicionamentos, ii) a argumentação (para nos convencer ou aos outros) e iii) a procura de explicações.

De acordo com o NCTM (2007), o processo de *Comunicação*, uma componente imprescindível da matemática e da educação matemática, é “uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática (p. 66). Cabrita *et al.* (2008) e Guerreiro e Menezes (2010) afirmam que este processo assume um papel fundamental na construção de relações entre diferentes representações matemáticas.

A *Representação* é um dos processos fundamentais da matemática, uma vez que “a forma pela qual as ideias matemáticas são representadas é essencial para o modo como as

peessoas compreendem e utilizam essas ideias” (NCTM, 2007, p. 75). A *Representação* para além de apoiar a compreensão de conceitos, a exploração, a interpretação de situações e a descoberta de relações, é considerada um meio de CM (Correia, 2005; Cabrita *et al.*, 2008).

O NCTM (2007) considera que estabelecer *Conexões* entre ideias matemáticas é um processo que fomenta uma compreensão matemática mais profunda e duradoura. Além disto, Boavida e colaboradores (2008) sublinham que as conexões matemáticas visam a criação e exploração de situações em que os alunos trabalhem a Matemática ligada i) a problemas da vida real, ii) a outras áreas curriculares e iii) a tópicos ou temas matemáticos.

Na área da educação matemática, autores de referência destacam outros processos matemáticos. De acordo com Cabrita e colaboradores (2008) *relacionar e operar* é outro processo matemático, que tem subjacente outros processos, tais como classificar e ordenar; calcular e estabelecer relações. Segundo os mesmos autores, é de salientar que estabelecer relações se reporta “ao procurar e explicitar ligações entre ideias e conceitos matemáticos” (p. 15).

A *Formulação de problemas* é um processo “em que o aluno *pega* na informação e organiza-a, e interroga, compondo um texto escrito que tenha sentido (Correia, 2005, p. 65). A principal diferença entre o processo matemático *resolução de problemas* e este reside no fato de, que no primeiro, é o professor que formula, à partida, o problema ou a pergunta, enquanto no segundo são os alunos que formulam situações para os problemas, tendo em conta o envolvimento em experiências do seu contexto social (Palhares, 2004; Correia, 2005; Cabrita *et al.*, 2008).

Investigar também é um processo matemático que tem assumido grande destaque há alguns anos. Este processo, estritamente ligado à realização das TI (ponto 2.3), exige o envolvimento ativo do aluno na formulação de questões, na elaboração de estratégias, na generalização de resultados, no estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da Matemática e na sistematização de ideias (Correia, 2005; Ponte *et al.*, 2006; Cabrita *et al.*, 2008). De acordo com Skovsmove (2000); Braumann (2002); Baroody e Dowek (2003) aprender matemática compreende, necessariamente, uma abordagem de investigação, em contexto sala de aula. O primeiro autor reforça, ainda, que só é possível aprender matemática fazendo investigação matemática, ao nível adequado de escolaridade. Com esta abordagem de ensino, as crianças são vistas como capazes de construir os seus próprios

pensamentos matemáticos. Segundo Braumann (2002) “só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo” (p. 5).

Skovsmose (2000) afirma que a matemática escolar deve assentar na busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem. Porém, sublinha que a integração de diferentes cenários de investigação matemática, em contexto sala de aula, podem dar suporte a um trabalho de investigação e diferem fortemente daqueles dominados por exercícios.

De facto, nas últimas décadas os processos matemáticos têm sido alvo de discussão, designadamente, no V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática [CIMEM], realizado no ano de 2005, no Porto, onde foram apresentados e discutidos diversas perspectivas e desafios para a educação matemática e onde contou com intervenções de convidados de diversos países: Brasil, Espanha, Portugal e vários países da América Latina. A intervenção do investigador, Fredy González, no V CIMEM, incidiu sobre *La educación matemática en educación básica: Retos y perspectivas desde Latinoamérica* e num dos momentos da sua intervenção enunciou três pontos fundamentais para a aquisição de conhecimentos e saberes da disciplina de matemática:

1. El manejo de conceptos y procedimientos matemáticos; la capacidad de leer, escribir y comunicar matemáticamente, la capacidad de dar sentido lógico y de comprender y explicar situaciones matemáticas;
2. Comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos;
3. Llegar, a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, a resultados que puedan comunicarse y sirvan de base para hacer interpretaciones y representaciones. (González, 2005, p. 55)

Além disso, Freiman e Lirette-Pitre (2009) salientam que o desenvolvimento dos processos matemáticos (nomeadamente, a resolução de problemas e CM) aliado à utilização de tecnologias de informação e comunicação (TIC) são uma combinação vencedora, simultaneamente um desafio nas salas de aula de matemática.

Em Portugal, autores como Tenreiro-Vieira e Vieira (2004), consideram que no ensino da matemática, para além da aquisição de conhecimentos, deve ser dada ênfase ao desenvolvimento de capacidades de pensamento. Salientam, ainda, que para não haver um desfasamento entre o tipo de preparação da escola e as exigências da sociedade, a

matemática deve ser “encarada como uma atividade humana que fornece meios para a resolução de problemas e que permeia muitos campos de trabalho na sociedade actual” (p. 49).

Em jeito de conclusão, pretende-se, para o ensino e aprendizagem da matemática, em Portugal, uma abordagem curricular inovadora, baseada em diversas ideias, entre elas, desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, valorização do espírito crítico e autonomia dos alunos, trabalho de grupo, comunicação escrita e discussão coletiva em contexto sala de aula (Ponte, 2008).

2.1.2 Programa de matemática para o ensino básico

Atualmente, os documentos orientadores, referentes à educação básica em Portugal, no que diz respeito à Matemática, são: o PMEB (Ponte *et al.*, 2007) e as Metas de Aprendizagem (2012).

Como a homologação do documento definitivo das Metas de aprendizagem (2012) referentes à matemática (reformulação das metas de aprendizagem de 2011) ocorreu recentemente (coincidindo com a etapa final do presente estudo), nesta secção focam-se apenas aspetos relativos ao PMEB (Ponte *et al.*, 2007), em detrimento das Metas de Aprendizagem (2012). Tal documento das metas de aprendizagem será, somente, obrigatório no próximo ano letivo 2013/2014, em alguns anos de escolaridade. Este novo documento das Metas de aprendizagem foi elaborado por uma equipa designada para o efeito pelo Ministro da Educação.

Assim, o PMEB (Ponte *et al.*, 2007) constitui um reajustamento aos antigos programas de matemática para o ensino básico publicados em 1990 (para o 1º ciclo) e em 1991 (para o 2º e 3º ciclos) e introduz modificações curriculares em relação ao Currículo Nacional do Ensino Básico (2001).

De acordo com os autores, o PMEB explicita as finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática. Foca as capacidades transversais: resolução de problemas, CM e raciocínio matemático (ao mesmo nível que os temas matemáticos), bem como os temas matemáticos a abordar ao longo do ensino básico. A este nível, é de salientar o facto do tema *Organização e Tratamento de Dados* ser reforçado em todos os ciclos e a inclusão no 2º e 3º ciclo do tema *Álgebra*. No 1º ciclo não surge explicitamente tal tema, porém é feita

referência ao desenvolvimento do pensamento algébrico em alguns temas, como por exemplo *Números e Operações*.

Tendo em conta o propósito deste estudo, de seguida refere-se a estrutura e organização do PMEB (2007) e, em simultâneo, dá-se conta do constante no mesmo relativamente à CM e às TI.

O documento de orientação curricular, em causa, começa por apresentar duas grandes finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática, comuns aos três ciclos do ensino básico. As duas finalidades são:

- a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados;
 - b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.
- (Ponte *et al.*, 2007, p. 3)

Um dos pontos da finalidade a) remete, explicitamente, para a CM, ao ser referido que essa finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento da:

- . capacidade de comunicar em matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega. (Ponte *et al.*, 2007, p. 3)

Decorrente das finalidades enunciadas no PMEB (Ponte *et al.*, 2007), são expressos nove objetivos gerais para o ensino da matemática. O primeiro objetivo diz respeito aos conhecimentos básicos a adquirir pelos alunos e o segundo ao desenvolvimento da compreensão da Matemática. Os cinco objetivos subsequentes remetem para os diferentes processos matemáticos e/ou capacidades transversais: resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticos, representações e conexões. Os dois últimos objetivos gerais, enunciados no programa, procuram explicitar o modo como se espera que os alunos façam Matemática de modo autónomo, assim como, a forma como alunos desenvolvam o gosto por esta disciplina (Ponte, 2009; Ponte e Serrazina, 2009).

Como referido no parágrafo anterior, cinco dos objetivos gerais referem-se às capacidades transversais e/ou processos matemáticos. A este nível, o quarto objetivo geral reporta-se explicitamente à CM (implicitamente é patente em outros objetivos gerais, como

capacidade transversal e/ou processo matemático). De seguida enuncia-se o objetivo geral referido, bem como os objetivos específicos:

Os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático. Isto é, devem ser capazes de:

- interpretar enunciados matemáticos formulados oralmente e por escrito;
- usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas com precisão;
- descrever e explicar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam;
- argumentar e discutir as argumentações de outros (Ponte *et al.*, 2007, p. 5).

No sexto e oitavo objetivos gerais (relativos ao raciocínio matemático e ao fazer matemática de forma autónoma, respetivamente) é recomendado a abordagem de TI de uma forma subentendida, ao indicar que o aluno deve ser capaz de *formular e investigar conjecturas matemáticas*, na medida em que estes processos matemáticos são particulares das TI.

Ao longo da abordagem dos temas matemáticos é enfatizada e sugerida a realização de TI, em todos os ciclos de escolaridade. Por exemplo, no âmbito do tema de *Números e Operações*, a partir da resolução de investigações de regularidades numéricas e na sequência do tema *Organização e Tratamento de Dados*, a partir de investigações tendo por base características dos alunos da turma.

No final de cada grande tema matemático, de cada ciclo de escolaridade, são realçados aspetos referentes às capacidades transversais, uma vez que estas são fundamentais para a construção, consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos (Ponte e Serrazina, 2009). Em relação à CM como capacidade transversal, os objetivos específicos enunciados, no programa, para o 1º ciclo, são:

Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas; Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas; Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulário próprios; Discutir resultados, processos e ideias matemáticos (Ponte *et al.*, 2007, p. 31).

No PMEB (Ponte *et al.*, 2007) constam, ainda, orientações metodológicas gerais e indicações para a Gestão Curricular e para a Avaliação para os três ciclos do ensino básico. No âmbito das orientações metodológicas gerais são feitas várias referências à CM, em que uma delas salienta que:

Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio matemático e a comunicação matemática, para além de constituírem objetivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades a realizar em aula (Ponte *et al.*, 2007, p. 9).

No PMEB (Ponte *et al.*, 2007) são, também, enunciadas orientações metodológicas, relativas à realização de investigações em sala de aula. Nesta condição, é recomendado que o aluno tenha oportunidade de realizar diferentes tipos de tarefas, em particular, TI. No documento de orientação curricular (Ponte *et al.*, 2007) é dado destaque às tarefas “que assumam um carácter desafiante, ao papel das situações contextualizadas, à importância das representações e das conexões matemáticas e com aspectos extra-matemáticos” (Ponte, 2009, p. 100). Por fim, na parte das orientações metodológicas é, ainda, salientado que o trabalho em grupo pode ser muito produtivo na realização de uma TI matemática.

2.2 Comunicação matemática

Este ponto está dividido em duas secções. Na primeira secção apresentam-se concetualizações acerca da CM e na segunda secção focam-se aspetos referentes ao *como* e *porquê* promover a CM.

2.2.1 Concetualizações e definições

Nas últimas décadas, a investigação no âmbito da CM tem registado um assinalável incremento, em diferentes dimensões, entre elas, modos de comunicação, formas de comunicação e interações sociais (Guerreiro e Menezes, 2010; Boavida e Menezes, 2012). Isto porque, a valorização da CM, a partir da criação de momentos ricos de interação em torno de ideias significativas, cria oportunidades favoráveis à apropriação de outras dimensões da matemática que vão muito para além da visão concebida como números, factos, regras e reprodução de procedimentos memorizados (Boavida *et al.*, 2008).

O NCTM (2007) enfatiza a comunicação como “uma parte essencial da matemática e da educação matemática. É uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática” (p. 66). O desenvolvimento da CM pode ocorrer a partir do envolvimento dos alunos em discussões sobre ideias matemáticas, raciocínios desenvolvidos e resultados alcançados, entre outras situações de uma aula de matemática. É salientado, ainda, que ao

longo do percurso escolar o conjunto de ferramentas e formas de comunicação do aluno deve ser cada vez mais elaborado.

De acordo com o PMEB (Ponte *et al.*, 2007, p. 8), a CM “envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática”. A vertente oral ocorre em momentos de discussão na sala de aula, tanto em grande grupo, como em pequeno grupo. A vertente escrita diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e também de pequenos textos sobre assuntos matemáticos.

Importa salientar que o termo *linguagem* é indissociável do termo de *comunicação*, todavia, na verdade, são distintos, apesar de estarem relacionados (Cabrita *et al.*, 2010). Destaca-se aqui a definição de linguagem, concretamente, linguagem matemática:

A linguagem matemática utiliza uma vasta gama de símbolos unicamente relacionados com esta ciência, com um código próprio e assente em regras específicas, entendidos apenas num certo contexto e numa determinada comunidade. (Cabrita *et al.*, 2010, p.14)

Decorrente da citação anterior, Boavida e colaboradores (2008) e Cabrita e colaboradores (2010) destacam três tipos de linguagem matemática: *a linguagem oral*, que em casos matemáticos concretos, em contexto sala de aula, se baseia, por exemplo, na verbalização de ideias, justificação de procedimentos e apresentação de conjeturas; *a representação pictórica* que assume três dimensões, a ativa, a icónica e a simbólica; e *a linguagem escrita* classificada como recurso básico de comunicação que permite perpetuar as ideias e os conhecimentos (cf. figura 1).

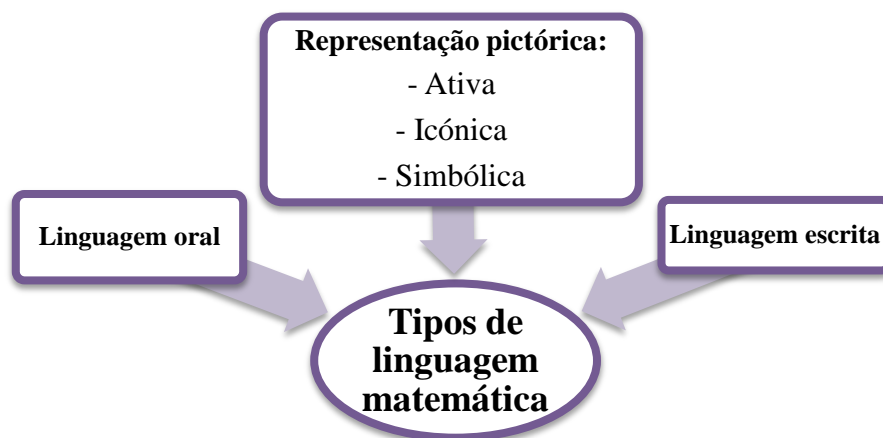


Figura 1 - Diferentes tipos de linguagem matemática

A representação *ativa* corresponde às atividades desenvolvidas com objetos; a *icónica* corresponde a diagramas (imagens resumidas) realizados de um conceito ou situação e a *simbólica* corresponde a registos efetuados com recurso a um sistema simbólico regido por normas ou leis (Correia, 2005; Ponte *et al.*, 2008).

No PMEB é valorizada “a capacidade dos alunos comunicarem as suas ideias matemáticas e de interpretarem e compreenderem as ideias dos outros, participando em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos” (Guerreiro, 2010, p. 211). O PMEB atribuiu um triplo papel à CM, pois é encarada como: i) objetivo curricular fundamental na disciplina de Matemática; ii) conteúdo, na medida em que constitui uma das capacidades transversais a promover pelo professor (além das outras duas capacidades: resolução de problemas e raciocínio matemático), em articulação com os temas matemáticos e iii) meio de ensino do professor e de aprendizagem dos alunos (Ponte *et al.*, 2008; Cabrita *et al.*, 2010; Medeiros e Ponte, 2010; Amaral *et al.*, 2010; Menezes, 2010; Medeiros, 2010; Sousa *et al.*, 2009).

Sobre este assunto, de acordo com investigadores na área da educação matemática, a CM assume um papel essencial no desenvolvimento dos significados matemáticos dos alunos e na compreensão dos conceitos matemáticos, a partir da negociação de significados (Martinho e Ponte, 2005; Medeiros e Ponte, 2010 e Amaral *et al.*, 2010). A *negociação de significados* está relacionada com a construção progressiva de significados por parte do aluno, a partir do processo de partilha e de confronto de ideias (Martinho e Ponte, 2005).

A par da negociação de significados, outro aspeto que se destaca desta problemática são as *interações*, na medida em que a “comunicação constitui um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente” (Martinho e Ponte, 2005, p. 1). As *interações* dizem respeito às discussões aluno-aluno, nos trabalhos de pares e em grupo (ao falarem e ao ouvirem) e entre professor-aluno. Romão (2000) e Guerreiro (2010) clarificam que a comunicação enquanto interação social é um processo que resulta da partilha de significados construídos e reconstruídos pelos indivíduos.

Medeiros e Ponte (2010) aludem outro modelo da CM – a explicação. Esta pode ser realizada pelo aluno ou pelo professor. A explicação é vista como “um processo sem fim de representar as conexões, as relações entre a ideia que está sendo explicada e outras ideias matemáticas” (Bishop e Goffree, 1986 citado por Medeiros e Ponte, 2010, p. 197).

Analisando a comunicação, enquanto processo comunicativo na sala de aula, Brendefur e Frykholm (2000) consideram quatro tipos de comunicação, influenciados, em certa parte, pela visão do professor sobre a comunicação (determinando assim a organização da aula, os papéis dos atores e o tipo de tarefas e sobretudo, diferentes aprendizagens dos alunos), concretamente,

i) *comunicação unidirecional* – associada ao ensino tradicional, assenta na ideia que o professor expõe e o aluno limita-se a ouvir; ii) *comunicação contributiva* – embora a implicação cognitiva dos alunos não seja substantiva, apresenta-se como uma modalidade em que estes participam no discurso da aula mas com pouco significado ao nível da qualidade das interações; iii) *comunicação reflexiva* – o discurso torna-se mais aberto e ele próprio objeto de reflexão. Digamos que o saber matemático não se centraliza no professor e, de alguma forma, resulta do contributo democrático e iv) *comunicação instrutiva* – mais profunda na sua natureza em relação às anteriores, sujeita aos ritmos de conversação e marcada de forma significativa pelos contributos dos alunos, pelas suas argumentações, resultante de uma actividade metacognitiva. (Cabrita *et al.*, 2010, p. 16)

O ensino expositivo é marcado pela comunicação unidirecional, em contrapartida, o ensino-aprendizagem exploratório é associado à comunicação contributiva e à comunicação reflexiva (Ponte, 2009). As atuais orientações curriculares sugerem uma mudança do ensino expositivo para um ensino-aprendizagem exploratório, no sentido de valorizar a comunicação reflexiva e instrutiva. Cabrita e Fonseca (2012) acrescentam que é desejável, uma evolução da comunicação unidirecional, para o modo de comunicação instrutiva. A este respeito, Brendefur e Frykholm (2000) consideram que é fundamental uma modificação para comunicação instrutiva por dois aspetos, i) facilita a compreensão matemática e ii) ajuda o professor a conhecer os raciocínios matemáticos, pontos fortes e limitações dos alunos. Por estas razões, os autores referem que este tipo de comunicação é extremamente poderoso no âmbito das aulas de matemática. É de salientar que cada nível sucessivo de comunicação em contexto de sala de aula assume necessariamente características do seu antecessor, dado que os diferentes tipos de comunicação representam etapas progressivas de comunicação e os diferentes níveis podem ser desenvolvidos em distintos momentos da sala de aula (Brendefur e Frykholm, 2000; Pinto e Santos, 2010; Ribeiro e Carrilo, 2010; Rodrigues, 2010). Por exemplo, quando os alunos estão comunicando reflexivamente, presume-se que características da comunicação contributiva e unidirecional tomam posição. (Brendefur e Frykholm, 2000).

A propósito dos diferentes níveis de comunicação destaca-se o papel relevante da argumentação nas aulas de matemática. Destaca-se que este processo está intimamente ligado à relevância do desenvolvimento da capacidade de desenvolver o raciocínio matemático e de aprender Matemática com compreensão, decorrente de justificações e explicações matemáticas em função da fundamentação de raciocínios, descobertas, conjecturas, testes matemáticos (entre outros) (Boavida *et al.*, 2008; Rodrigues, 2010 e Cabrita *et al.*, 2010).

2.2.2 Promover a comunicação matemática: como e porquê?

Na perspetiva de Baroody (1993), citado por Menezes (2000), o ensino da matemática deve ser focado na CM por duas razões. A primeira está relacionada com a linguagem matemática, pois para comunicar em matemática é essencial utilizar uma linguagem clara e precisa. Para tal, é fundamental proporcionar aos alunos uma diversidade de situações no contexto das aulas de matemática. A CM do aluno pode ser desenvolvida em diferentes momentos da aula de matemática, a partir do seu poder comunicativo, tanto oral como escrito, sendo efetivada não só ao produzir informação, assim como, ao ouvir e interpretar informação veiculada pelos colegas e pelo professor, e sobretudo, ao participar de forma crítica e construtiva numa discussão (Ponte, 2009). Além disso, Cabrita e colaboradores (2010) destacam que a CM pode ser promovida em sala de aula a partir dos questionamentos, centrada nos dois intervenientes de sala de aula, alunos e professor. Em relação à linguagem matemática, Amaral e colaboradores (2010, p. 290) salientam, ainda, que “o cuidado e a precisão na linguagem matemática dependem da riqueza das experiências de CM vividas” pelos alunos. Daqui emerge que a promoção da CM aciona a aquisição e o uso da terminologia e simbologia próprias da Matemática (Ponte *et al.*, 2007 e Amaral *et al.*, 2010).

A outra razão está relacionada com a dimensão social da CM, pois a comunicação é uma parte integrante do *fazer Matemática* tanto ao nível da Matemática feita pelos profissionais como daquela que é feita pelos alunos.

O desenvolvimento da CM permite uma melhor compreensão de conceitos e ideias matemáticas, possibilita o desenvolvimento da capacidade de resolver tarefas de natureza diversificada e da capacidade de raciocínio (Menezes, 2000; Correia, 2005; Ponte *et al.*, 2008).

Baroody (1993), citado por Menezes (2000), acrescenta que a CM encoraja a confiança do aluno mediante situações de sala de aula de matemática, bem como em atividades do seu quotidiano, pois ao comunicar matematicamente o aluno desenvolve processos de estruturação do pensamento, tais como, verbalização dos seus raciocínios, explicação, discussão e confronto de processos e resultados.

A criação de oportunidades de desenvolvimento de capacidades de ordem superior no contexto da educação matemática, entre elas, a capacidade de comunicar matematicamente, é fundamental como forma de preparação para os desafios do quotidiano dos alunos, a dois níveis: profissional e pessoal (Tenreiro-Vieira *et al.*, 2010a).

Freiman e colaboradores (2009), citado por Amaral *et al.* (2010), acrescentam que a CM contribui na construção (para além da compreensão) das ideias matemáticas e no desenvolvimento de processos de pensamento cruciais para a melhoria da literacia matemática, como por exemplo a aquisição e uso de terminologia e linguagem próprias da matemática. Pedrosa (2000) e Boavida e colaboradores (2008) reforçam que uma comunicação baseada na partilha de ideias, em contexto sala de aula, permite: i) a interação de cada aluno com as ideias expressas por outros alunos, ii) a apropriação de ideias dos outros e iii) a ponderação sobre as suas ideias; promovendo assim a aprendizagem matemática e uma melhor compreensão do próprio raciocínio.

Segundo o NCTM (2007), ao longo do ensino do pré-escolar ao 12º ano, todos os alunos devem desenvolver capacidades relativas à CM, expressas em quatro normas de comunicação: 1) organizar e consolidar o seu pensamento matemático; 2) expressar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros; 3) analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usado por outros e 4) usar a linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.

A primeira norma de comunicação está relacionada com a organização e a consolidação do pensamento matemático. Por vezes, o desenvolvimento destes dois processos estimula a reflexão. Nesta linha, Boavida e colaboradores (2008) salientam que “comunicar uma ideia ou um raciocínio a outro, de forma clara, exige a organização e clarificação do nosso próprio pensamento” (p. 62).

No que concerne à segunda norma de comunicação é fundamental que o docente conceba diversificadas situações, em contexto sala de aula, nas quais o aluno tenha a oportunidade de partilhar as suas ideias e raciocínios matemáticos, tanto a nível oral como

escrito, de uma forma suficientemente clara, perceptível e convincente. A este respeito, Pedrosa (2000) e Boavida *et al.* (2008) sublinham que uma escolha cuidadosa das tarefas a propor aos alunos tem um papel relevante na criação de oportunidades ricas de comunicação.

A terceira norma de comunicação centra-se na análise e avaliação das estratégias e do pensamento usados pelos outros, desenvolvendo deste modo a capacidade crítica do aluno. No contexto das normas, um aluno crítico é aquele que é capaz de ponderar, avaliar, refutar, questionar, concordar, e utilizar/aplicar os raciocínios e as estratégias matemáticas dos colegas e do professor mediante a sua compreensão matemática.

A última norma de comunicação, mencionada pelo organismo internacional, remete para o uso da linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com precisão. É fundamental que o professor possibilite aos alunos diversas experiências que lhe permitam apreciar o poder e a precisão da linguagem matemática. No âmbito desta norma de comunicação é ainda sublinhado que o docente deve “evitar a imposição precoce e prematura da linguagem matemática formal” (NCTM, 2007, p.70).

Outros aspetos relacionados com a promoção da CM, salientados também pelo NCTM (2007) são relativos ao tipo de questões formuladas pelo professor, determinantes no processo de aprendizagem da matemática, e às discussões em contexto sala de aula. O tipo de questões formuladas pelo professor nas aulas de matemática é um fator muito significativo na promoção do poder comunicativo, nomeadamente, o poder comunicativo oral dos alunos, dado que desempenha um papel preponderante na discussão de ideias, entre outras situações de sala de aula.

Love e Mason (1995), citado por Martinho e Ponte (2005), distinguem três tipos principais de perguntas: de *focalização*, de *confirmação* e de *inquirição*. O primeiro tipo tem como objetivo centrar a atenção do aluno num aspeto específico; o segundo tipo procura testar os conhecimentos dos alunos, sabendo o professor exatamente a resposta que quer ouvir e onde quer chegar com ela – são perguntas que induzem respostas imediatas e únicas, julgadas “naturais” na rotina diária; por último, as perguntas de inquirição podem ser consideradas como verdadeiras perguntas, no sentido em que o professor quando as formula, pretende obter, de facto, alguma informação por parte do aluno. Ponte (2009) julga que todos os tipos de perguntas são fundamentais, porém as perguntas de inquirição são, seguramente, as que melhor evidenciam o raciocínio dos alunos e favorecem a sua

compreensão matemática. Contudo estas não são muito frequentes na aulas de matemática, pois não é fácil alterar padrões de comunicação mais clássicos (associados ao ensino expositivo) em contexto sala de aula (Martinho e Ponte, 2005).

Boavida e colaboradores (2008) atribuem, também, um papel importante aos diferentes papéis das questões no desenvolvimento de capacidades de CM dos alunos. De acordo com a categorização de Way (2001) (elaborada no contexto de tarefas de carácter aberto, mas passível de ser adequadas a outras situações), as questões podem ser caracterizadas segundo quatro tipos, designadamente,

Questões de partida são questões abertas que pretendem focar o pensamento da criança numa determinada direcção. *Questões para incentivar o pensamento matemático* são questões que ajudam o aluno a focar-se numa determinada estratégia, desafiando-o a procurar regularidades e relações. *Questões para avaliação* caracterizam-se por um forte cariz analítico que visa, por um lado, promover no aluno a tomada de consciência do próprio pensamento e, por outro, dar ao professor pistas sobre a forma como ele pensa, o que compreende e como compreende. *Questões para a discussão final* são fundamentais para sistematizar e consolidar uma série de aspectos que se prendem tanto com resultados, como com processos na síntese ou discussão final de uma actividade. (Boavida *et al.*, 2008, p. 67)

De modo a clarificar cada tipo de questões, de seguida, apresentam-se alguns exemplos de cada um: i) questões de partida – *Quantos...? O que acontece quando...?*; ii) questões para incentivar o pensamento matemático – *Consegues relacionar de alguma maneira estas...? O que é igual? O que podemos fazer a partir de...?*; iii) questões para avaliação – *Como descobriste isso? Porque pensas isso? O que te fez decidir fazer dessa maneira*; iv) questões para discussão final – *Pensaram noutra maneira de fazer? Acham que encontrámos a melhor solução? Quem chegou a uma solução diferente?* (Boavida *et al.*, 2008). Todos os tipos de questões referidos são um importante meio que visa a promoção da CM, em contexto sala de aula, cabe ao professor formulá-las em função dos objetivos pretendidos. Por exemplo, para desencadear uma discussão na aula é preferível as questões do tipo iv). Para além do papel atribuído ao tipo de questões exploradas em contexto de sala é fundamental a gestão das respostas surgidas em sala de aula, devendo o professor assumir um papel preponderante na seleção das respostas favoráveis à aprendizagem dos alunos (Boavida *et al.*, 2008).

Além da formulação de diferentes questões e da gestão das respostas dos alunos, e de modo a proporcionar o desenvolvimento de capacidades de CM (capacidade transversal destacada pelo PMEB, Ponte *et al.*, 2007) cabe ao professor proporcionar situações contínuas de trabalho nas aulas de matemática, entre elas, propor aos alunos tarefas diversificadas (exercícios, problemas, projetos, investigações e explorações matemáticas); fomentar a análise e reflexão de resoluções dos alunos e dos colegas. Além disso, o professor deve dar atenção aos raciocínios matemáticos dos alunos e, consequentemente estimular a explicitação e análise dos mesmos, de forma clara e rigorosa; e, fomentar o envolvimento dos alunos perante os raciocínios dos colegas (Pinto e Santos, 2010 e Sousa *et al.*, 2009).

Em jeito de conclusão, Amaral e colaboradores (2010) consideram que professor deve criar ambientes que envolvam a participação dos alunos e, por conseguinte, ambientes nos quais capacidades de CM sejam explicitamente e eficazmente promovidas.

2.3 Tarefas de Investigação na aula de matemática

Recentes estudos na área da educação matemática evidenciam que a promoção da CM está fortemente relacionada com a resolução de diferentes tipos de tarefas, designadamente, problemas e TI. A relação existente entre a promoção da CM e a realização de problemas e investigações “é uma consequência natural da necessidade dos estudantes se envolverem na explicação, justificação e discussão de estratégias matemáticas e soluções” (Henriques e Ponte, 2010, p. 321). Com efeito, as TI constituem potenciais oportunidades de aprendizagem e de desenvolvimento da CM, dado que incitam a uma atitude de questionamento dos alunos, assim como do professor (Ponte *et al.*, 2006, Corradi, 2011 e Sousa *et al.*, 2009).

Deste modo, este ponto reporta-se às TI numa aula de matemática. Assim sendo, primeiramente, procura-se clarificar o que se entende por TI. De seguida, explanam-se diversas orientações para a ação do professor no âmbito da implementação de TI, de modo a proporcionar uma efetiva aprendizagem matemática aos alunos.

2.3.1 Definições e conceitualizações

O objetivo é a jornada, não o destino. (Pirie, 1987 citado por Ernest, 1996, p. 30)

Atualmente investigadores na área da educação matemática consideram que a promoção da aprendizagem matemática dos alunos é influenciada, em grande parte, pela diversidade de tarefas realizadas em contexto de sala de aula.

Ponte (2010) distingue quatro tipos de tarefas para a aula de matemática: exercícios, problemas, explorações e investigações (figura 2), em função de dois critérios: o grau de complexidade (reduzido ou elevado) e a estrutura (fechada ou aberta). Os exercícios e as explorações são tarefas que apresentam uma complexidade reduzida. Quanto à estrutura, no primeiro caso é considerada fechada e no segundo aberta. Em relação aos problemas e às investigações, ambas apresentam um grau de complexidade elevado. Relativamente à estrutura, os problemas são tarefas com uma estrutura fechada, enquanto as investigações assumem uma estrutura aberta.

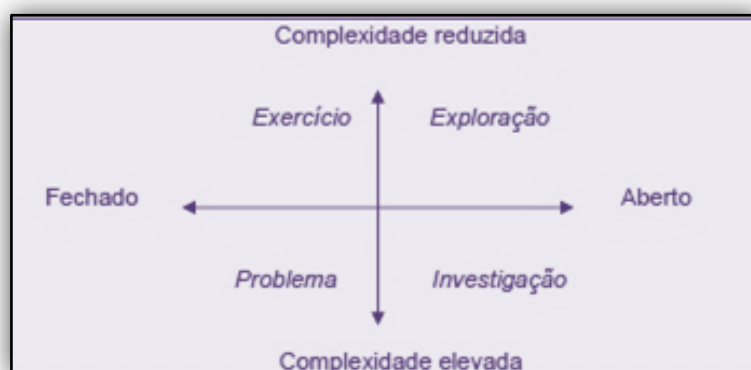


Figura 2 - Diferenciação entre os diversos tipos de tarefas matemáticas (Ponte, 2010)

O autor refere ainda outro tipo de tarefa – o *Projeto* – considerando que este assemelha-se a uma investigação, no que concerne ao grau de complexidade e ao grau de abertura, diferindo apenas num aspeto: apresenta um carácter de duração mais prolongado.

De acordo com a categorização apresentada por Ponte (2010), as explorações e as investigações são distintas, ao nível do grau de complexidade; porém alguns docentes não as distinguem, designando-as por investigações.

Uma questão controversa e que carece de clarificação, por parte da comunidade matemática, está relacionada com a distinção entre os tipos de tarefas: problemas e investigações. Fonseca e colaboradores (1999) e Palhares (2004) consideram que o objetivo das investigações é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes conforme uma dada situação, sendo assim um processo divergente. Esta visão já era defendida por Ernest (1996) ao salientar que nas investigações “a ênfase está no explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objetivo específico (p. 30).” Por sua vez, a resolução de problemas é encarada como um processo convergente, sendo que o objetivo base é encontrar um caminho para atingir uma meta não instantaneamente alcançável.

Ernest (1996) e Palhares (2004) referem outra característica que ajuda a clarificar o conceito de investigação matemática e distinguir os dois tipos de tarefas: investigações e problemas, sendo esta relacionada com o tipo de questões. Na perspetiva dos autores, num problema as questões estão formuladas à partida, enquanto nas TI a formulação de questões é a primeira etapa a desenvolver.

Zabala (2008) refere que a distinção entre problemas e investigações relaciona-se com o contexto real. Os problemas fazem (ou deviam fazer) referência ao contexto real ao passo que as investigações podem prescindir dessa situação. Acrescenta, também, que as estratégias ou processos para a resolução de cada uma destas tarefas são similares.

Todavia, alguns autores defendem que a dissemelhança entre TI e problemas é muito insignificante. Em certas situações, ambos os tipos de tarefas são intitulados, arbitrariamente, por problema ou investigação. Isto acontece, porque os tipos de tarefas, em questão, possuem um aspeto em comum: o grau de complexidade elevado.

Pehkonen (1997), citado por Brocardo (2001), não distingue problemas de investigações. No entanto, considera que os problemas podem ser caracterizados por uma situação de partida (aberta ou fechada) e objetivo de situação (aberto).

Numa TI a situação de partida configura-se como uma situação aberta, porquanto a questão inicial não está bem definida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição (Ponte *et al.*, 2006 e Olegário *et al.*, 2009). Uma TI é caracterizada por começar com objetivos que vão sendo progressivamente estruturados e por envolver processos como formular, testar e aperfeiçoar conjecturas (Segurado e Ponte, 1998; Diezmann *et al.*, 2001; Ponte *et al.*, 2006; Cabrita *et al.*, 2008; Henriques e Ponte, 2008 e

Olegário *et al.*, 2009). Cunha e colaboradores (1995), Brocardo (2001) e Ponte (2010) salientam que o contexto de uma TI implica, também, a formulação de questões; a produção, a análise e o refinamento de conjecturas; a demonstração; e a comunicação de resultados. Decorrente do exposto, Ponte (2003a) apresenta um esquema (figura 3) com os momentos envolvidos na realização de uma TI, bem como as diversas atividades que podem estar incluídas em cada um dos momentos. É de salientar que nem sempre as etapas, indicadas no esquema, seguem a mesma ordem. Por vezes “a conjectura inicial aparece simultaneamente com a formulação de questões, o teste de uma conjectura pode levar à formulação de novas questões, etc” (Ponte, 2003a, p. 7). Nesta condição, Brocardo (2001) e Ponte e colaboradores (2006) sublinham que uma TI envolve um ciclo marcado por diferentes processos matemáticos, que podem não ser seguidos de uma forma linear e ordenada.

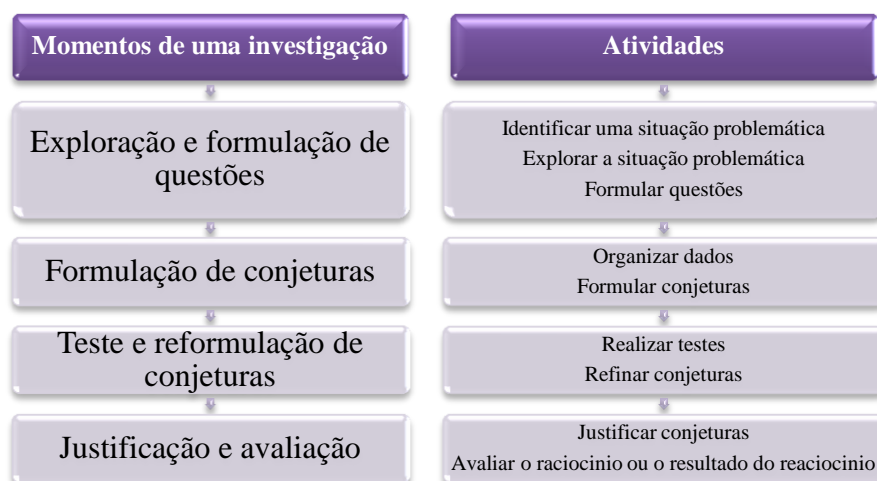


Figura 3- Momentos caraterísticos de uma TI (Ponte, 2003a, p.7)

Uma investigação matemática significa usar conhecimentos matemáticos que permitam tomar decisões sobre as questões, numa perspetiva de uma atividade próxima da dos matemáticos profissionais (Brocardo, 2001; Henriques e Ponte, 2008; Olegário *et al.*, 2009). Zabala (2008) defende esta última ideia, afirmando que as investigações matemáticas dão a possibilidade aos alunos de se vislumbrarem no apaixonante mundo dos matemáticos. Ponte e colaboradores (2006) ressaltam, ainda, que um dos aspetos profícuos das TI reside no facto de incitar o aluno a aprender a mobilizar “os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (p. 23).

2.3.2 Orientações para a ação do professor

Para que a realização de TI na aula de matemática constitua, realmente, um momento de aprendizagem significativa torna-se necessário que o professor invista bastante na sua preparação, implementação e avaliação (Fonseca *et al.*, 1999, Ponte *et al.*, 2006; Corradi, 2011), na medida em que

embora uma determinada tarefa seja bastante rica do ponto de vista matemático, a possibilidade de colher todos os frutos dessa tarefa pode ser amputada se não houver tempo suficiente para exploração, se não houver lugar para discussão, argumentação e apurar conclusões. (Serrazina *et al.*, 2008 citado por Sousa *et al.*, 2009, p. 4)

Fonseca e colaboradores (1999) referem que dado o grau de complexidade e, acima de tudo, de imprevisibilidade associado à realização de TI, é essencial uma preparação cuidada para as mesmas, não exigida por outros tipos de tarefas, designadamente, os exercícios. Outro aspeto que o professor deve ter em atenção, considerado pelos autores, é relativo à imprescindibilidade de uma atitude de índole investigativa. Por outras palavras, é fundamental efetuar uma pesquisa em distintos materiais: manuais escolares, livros, internet e estudos de natureza científica, de modo a não se restringir somente pelo manual escolar adotado, por diversas razões, entre elas, selecionar TI ricas, estimulantes e relevantes; antever dificuldades ou certas conjecturas dos alunos; manifestar autêntico e espontâneo raciocínio matemático; conhecer descrições feitas por outros professores que já utilizaram a mesma tarefa na sala de aula ou a mesma prática metodológica (conferindo ao professor oportunidade para aprender com a experiência refletida de outros).

Numa fase prévia, o professor deve delinear e ponderar sobre os objetivos pretendidos com a realização de uma TI, tendo em conta as orientações curriculares. O professor, mediante a implementação de uma TI, pode pretender alcançar diversos objetivos, entre eles, proporcionar aos alunos: a vivência de diferentes tipos de tarefas realizadas em sala de aula; ou a aprendizagem de um novo conteúdo programático; ou a exploração de um processo matemático característico de uma TI (Fonseca *et al.*, 1999; Porfírio e Oliveira, 1999; Corradi, 2011).

Outro ponto importante, que se torna necessário ter em conta, apontado por Fonseca e colaboradores (1999), está relacionado com a escolha das tarefas, sendo que estas devem ser: i) potencialmente ricas – abertas e desafiantes e ii) detentoras de questões de carácter aberto e interessante, permitindo assim o desenvolvimento do raciocínio matemático. Para

a satisfação deste último requisito, respeitante à estrutura das questões, o professor pode adaptar/reformular o tipo de questões das TI, sempre que julgar pertinente e conforme os objetivos pretendidos (Fonseca *et al.*, 1999; Corradi, 2011).

Os materiais são outro dos aspetos a que o professor deve atender aquando da seleção e implementação de TI em contexto sala de aula. Em determinadas tarefas desta natureza, a utilização de recursos, nomeadamente, *softwares* dinâmicos ou materiais manipuláveis, possibilita a exploração de investigações fortemente interessantes, facilitando, em grande medida, a sua realização e/ou visualização (Fonseca *et al.*, 1999; Skovsmose, 2000; Freiman e Lirette-Pitre, 2009). Por exemplo, os materiais manipuláveis podem auxiliar na realização de TI de geometria que implicam a visualização espacial e os *softwares* dinâmicos podem permitir aos alunos apresentarem os resultados, sob diversas representações matemáticas.

A forma como as propostas de investigações são redigidas é outro aspeto que o professor deve ponderar e analisar. A este respeito, Fonseca e colaboradores (1999) referem que é fundamental que o aluno perceba, a partir do enunciado, qual a natureza da tarefa que se pretende que ele desenvolva, para assim efetuar um trabalho de carácter investigativo e não representativo de outro tipo de tarefas, por exemplo, exercícios. É defendido que a escolha dos termos para este tipo de tarefas deve ser ponderada, sendo que os mesmos devem ser promotores e indiciadores do trabalho investigativo, por exemplo, *Investiga, Explora, Encontra relações*.

De acordo com Ponte (2010), durante a realização deste tipo de tarefas na aula de matemática, o docente deve respeitar três momentos essenciais: introdução da tarefa (negociação da tarefa), desenvolvimento (os alunos desenvolvem o seu trabalho de forma individual, ou a pares, ou em pequenos grupos, ou em grande grupo) e apresentação de resultados e discussão (partilha de ideias dos diversos grupos e oficialização do novo conhecimento matemático).

Por sua vez, Palhares (2004), com base nas ideias de Stevenson (2001), indica três fases que devem ser percorridas na realização de uma TI: *indutiva*, *dedutiva* e *criativa*. Na *fase indutiva* os alunos exploram a proposta; sistematizam e organizam dados; procuram padrões ou regularidades; testam e formulam uma conjectura. Na *fase dedutiva* os alunos argumentam e demonstram a conjectura. Finalmente, na *fase criativa* os alunos procuram extensões para a questão em estudo.

Ponte e colaboradores (2006) destacam quatro funções essenciais do professor, durante uma aula dedicada à realização de uma TI. Assim, cabe ao docente *desafiar os alunos*, motivando-os para a tarefa a realizar, procurando criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo.

O professor tem, ainda, a função de *avaliar o progresso dos alunos*, garantindo que os alunos compreendam a tarefa. Por conseguinte, o professor deve observar como os alunos encaram o trabalho investigativo e recolher informações sobre o modo como se vai desenrolando o trabalho dos alunos, entre outras funções.

Raciocinar matematicamente é uma das funções mais complexas do professor durante a implementação de TI, dado que é desejável, por parte do professor, um raciocínio matemático autêntico, principalmente, quando os alunos formulam uma conjectura ou uma questão em que o professor não havia pensado e/ou pouco evidente. Com efeito, muitos professores rejeitam implementar este tipo de tarefas, em contexto sala de aula, por recear a perda do poder sobre os alunos e do decorrer da aula, optando por realizar listas de exercícios repetitivos e nada investigativos (Oliveira, *et al.*, 1997; Frota, 2005; Corradi, 2011).

A última função atribuída ao professor destacada por Ponte e colaboradores (2006) é *apoiar os alunos* de forma a garantir que são atingidos os objetivos estabelecidos para a tarefa em questão. É fundamental apoiar os alunos e não validar os raciocínios dos alunos. Nesta linha, Oliveira e colaboradores (1998) referem que “o apoio a conceder, no sentido de os ajudar a ultrapassar certos bloqueios ou a tornar mais rica a sua investigação, é um dos aspetos mais complexos da intervenção do professor” (p. 4). O apoio pode passar por formular questões promotoras de reflexão, fornecer ou recordar informação relevante, fazer sínteses dos raciocínios dos alunos, entre outros.

Para concluir, sublinha-se que durante a realização de trabalho investigativo é essencial que o professor crie oportunidades para que os alunos construam significados matemáticos, essencialmente, no âmbito de momentos de confronto de ideias matemáticas, entre os alunos. Torna-se necessário que o professor proporcione discussões de ideias/raciocínios matemáticos dos alunos, durante a dinamização de investigações. O professor deve, igualmente, assumir uma postura de inquiridor (caraterizada pela formulação de questões de carácter aberto), possibilitando, desta forma, uma maior

intervenção do aluno, uma vez que assim o professor assegura uma melhor gestão da investigação (Ponte *et al.*, 2006; Brocardo, 2001).

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

O presente capítulo está organizado em cinco pontos. O primeiro diz respeito às opções metodológicas da investigação. O segundo apresenta o agrupamento/escola e os participantes do estudo. O terceiro centra-se na descrição do estudo. O quarto reporta às técnicas e aos instrumentos utilizados na recolha de dados. O último ponto foca as técnicas e procedimentos de análise dos dados.

3.1 Opções metodológicas

Em função das finalidades e questões de investigação, o estudo desenvolvido assume uma perspectiva *orientada para a prática*, segundo o plano de Investigação Ação [I-A], conforme designado por Coutinho (2011), no quadro de uma metodologia mista.

Para Pérez-Serrano (1998), citado por Coutinho (2011), uma investigação caracterizada por uma perspectiva orientada para a prática assenta num “forte carácter instrumental, visando uma tomada de decisões, uma melhoria de *praxis*, o controlo da implementação de políticas socio-educativas, ou a avaliação dos efeitos de outras já existentes” (p. 28). Esta perspectiva visa melhorar as práticas educativas e implica uma participação e colaboração de todos os participantes do estudo, investigador e alunos, tal como se perspectiva nesta investigação.

Coutinho (2011) salienta que a I-A é fundamental para áreas práticas, como no exemplo concreto, da área da educação, dado que o objetivo subjacente a este tipo de investigação é a solução de problemas.

Na perspectiva de Coutinho (2011) a Investigação-ação “pode ser descrita como uma família de metodologias de investigação que incluem acção (ou mudança) e investigação (ou compreensão) ao mesmo tempo, usando um processo cíclico ou em espiral, que alterna entre acção e reflexão crítica” (p. 313). É de salientar que em consonância com características do plano de I-A, a presente investigação é dirigida pela aluna estagiária investigadora [AEI] que concretiza, descreve e reflete criticamente sobre a dinamização de cinco sessões, em concreto, na implementação de TI em contexto sala de aula.

A investigação-ação pode ser considerada como “um processo em espiral, interactivo e focado num problema” (Coutinho, 2011, p. 314), caracterizada por sucessivos ciclos. No final de cada ciclo procede-se a uma avaliação, com intuito de se verificar se houve uma evolução das ações (Sousa, 2009). Seguindo esta linha, apresenta-se na figura

4, a planificação do estudo, que expressa as principais etapas do processo de I-A – planificar, observar, agir e refletir, bem como a relação com as fases do estudo, principais técnicas e instrumentos de recolha de dados usados.

Não foi possível concretizar mais do que um ciclo, decorrente das diversas circunstâncias para a concretização deste estudo, como por exemplo a duração da unidade curricular PPS B2 e a articulação da implementação das sessões com os conteúdos a abordar durante a PPS B2.

Apesar de ser concretizado apenas um ciclo, em cada uma das sessões implementadas foram manifestas as quatro etapas do processo de I-A: *planificar*, *observar*, *agir* e *refletir*. A etapa – *planificar* – foi patente ao longo de todo o ciclo, dada a necessidade de planificar cada uma das sessões (guião da aluna estagiária investigadora [GAEI] – Apêndice A), precedentemente, à dinamização das mesmas.

Outra etapa particular da I-A – *observar* – foi relevante antes, durante e após a implementação das diversas sessões. Antes da implementação das sessões, esta etapa foi determinante na definição da problemática do estudo e, em simultâneo, do propósito do estudo, bem como no decorrer da observação do ambiente de ensino/aprendizagem da turma do 3º ano de escolaridade. A observação foi, também, fundamental, no momento da implementação das sessões, na medida em que foram efetuados registos de situações relevantes para o presente estudo. Esta etapa assumiu distinção na planificação de sessões subsequentes, tendo em conta situações ocorridas em sessões anteriores.

A etapa – *agir* – esteve diretamente relacionada com a implementação das cinco sessões, que envolveram a realização de TI orientadas para a CM com vista à promoção de capacidades de CM.

Por último, a etapa – *refletir* – considerada como uma das mais relevantes por Coutinho (2011) do processo da I-A, foi evidenciada em diversos momentos deste ciclo de I-A. Esta etapa foi relevante, essencialmente, para tomar medidas e decisões para a implementação de sessões subsequentes (particularmente atendendo a ocorrências de sessões anteriores).

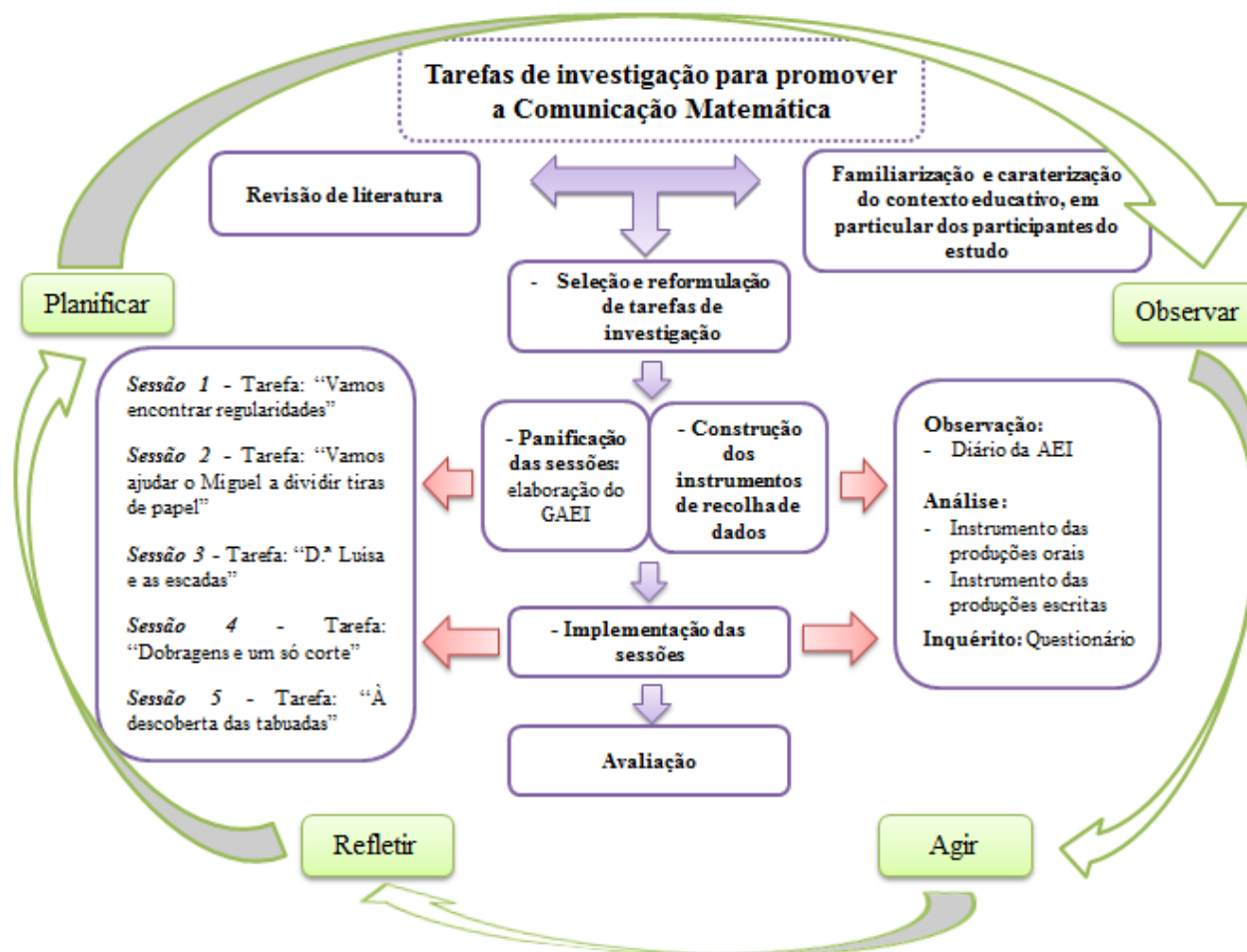


Figura 4 - Planificação do estudo

3.2 Caraterização do Agrupamento/Escola e dos participantes no estudo

Neste ponto apresenta-se uma breve caraterização do agrupamento/escola onde foi realizada a PPS B2 da AEI e dos participantes no presente estudo. Os dados apresentados são baseados em informação obtida a partir de diferentes fontes: Projeto Educativo do Agrupamento, Projeto Curricular de Agrupamento, Projeto Curricular de Turma [PCT], registos de observação efetuados pela AEI e registos da orientadora cooperante da escola (Professora Titular de Turma [PTT] do 1º CEB onde decorreu a PPS B2). A orientadora cooperante pertence ao quadro do agrupamento de escolas em questão e completou vinte e cinco anos de serviço.

Os participantes do estudo integram uma turma de 3º ano de escolaridade, de uma escola do ensino oficial público, pertencente a um Agrupamento de escolas do distrito de Aveiro. O agrupamento é constituído por: i) quatro estabelecimentos de ensino pré-escolar, inseridos em duas freguesias, ii) seis escolas do primeiro ciclo localizadas em três freguesias e iii) uma escola de 2º e 3º ciclos, que é a escola-sede. Os diversos estabelecimentos de ensino inserem-se em zonas semiurbanas, com dinâmicas e desenvolvimentos sociais distintos.

O número de elementos da comunidade educativa do agrupamento é de i) 1251 discentes (103 alunos do pré-escolar, 594 alunos do 1º ciclo e 554 alunos do 2º e 3º ciclos), ii) 268 docentes (262 docentes do ensino regular e 6 docentes de educação especial) e iii) 49 não docentes.

A escola-sede possui um anexo, com várias salas, destinadas a turmas do 1º ciclo, entre as quais aquela onde decorreu o estudo. O anexo é constituído por diferentes espaços: 5 salas de aula, 3 salas com materiais diversos, uma sala com computadores e 2 casas de banho para alunos.

Relativamente à sala de aula da turma onde decorreu a PPS B2 e, por conseguinte, onde foi realizado o estudo, as mesas dos alunos encontram-se organizadas por três filas. Cada fila possui cinco secretárias, sendo que cada uma destas é destinada a dois alunos.

De seguida, apresenta-se a organização da sala (fig. 5). Em algumas aulas a organização das secretárias dos alunos foi alterada, de modo a facilitar diferentes modos de trabalho, como por exemplo, o trabalho em pequenos grupos.

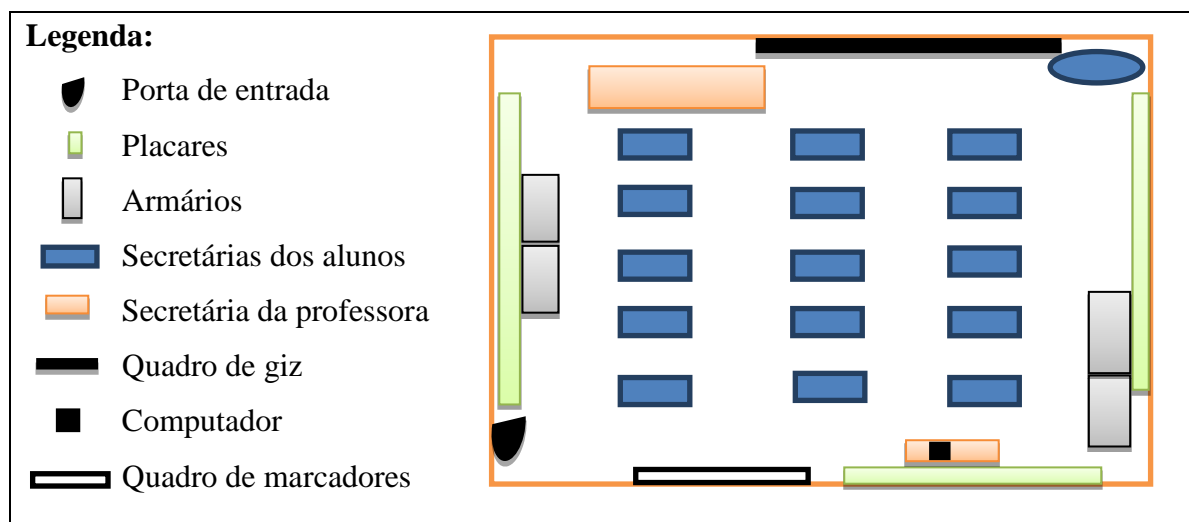


Figura 5 - Organização da sala da turma do 3º ano de escolaridade

A turma é constituída por 25 alunos, sendo que treze são do género feminino e doze são do género masculino. Todos os alunos nasceram no ano de 2003, exceto dois que nasceram no final do ano de 2002. A maioria dos alunos integra a turma desde o primeiro ano de escolaridade.

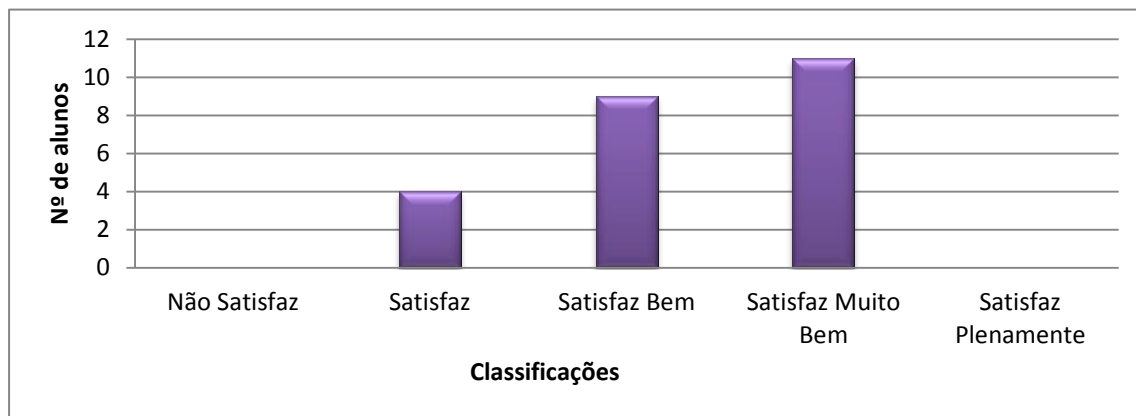
Todos os alunos da turma acompanham o Programa Curricular do 3º ano de escolaridade, exceto um aluno do género masculino, de etnia cigana, abrangido pelo nº 2 do art.º16º do Decreto-lei nº3/2008 de 7 de Janeiro. Este aluno é abrangido pelas seguintes medidas educativas: apoio pedagógico personalizado, adequações curriculares individuais e adequações no processo de avaliação. Decorrente do exposto, no contexto da investigação desenvolvida no âmbito da PPS B2, este aluno realizou um trabalho diferenciado que não foi considerado no âmbito deste estudo.

Segundo o PCT, a maioria dos alunos da turma tem um bom desempenho nas diferentes áreas disciplinares. Porém, três alunos evidenciam dificuldades de aprendizagem. Estes, em anos anteriores, usufruíram de um plano de recuperação em duas áreas disciplinares: Língua Portuguesa e Matemática.

No que concerne à avaliação dos alunos na área de matemática e tendo em conta os propósitos deste estudo, os registos documentais da orientadora cooperante, referentes ao final do 2º período, evidenciam que:

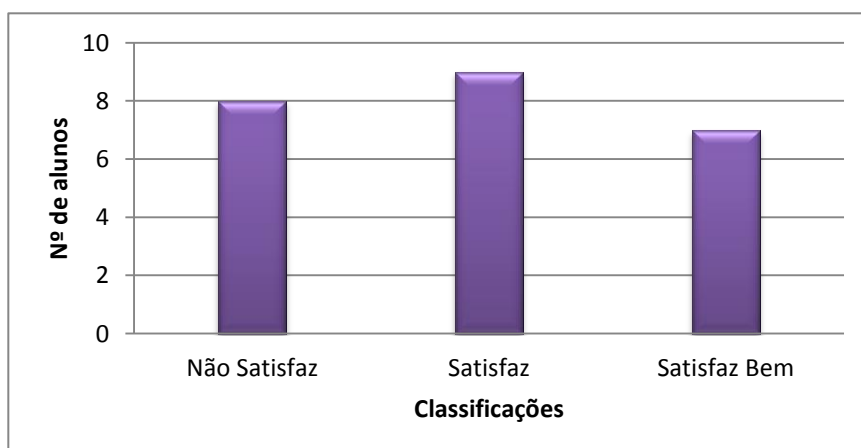
- a) Todos os alunos obtiveram uma classificação igual ou superior a “Satisfaz” (considerando a escala, em uso na escola, de cinco termos: Não Satisfaz, Satisfaz, Satisfaz Bem, Satisfaz Muito Bem e Satisfaz Plenamente), conforme mostra o gráfico 1.

Gráfico 1 - Classificações obtidas pelos alunos na área de matemática



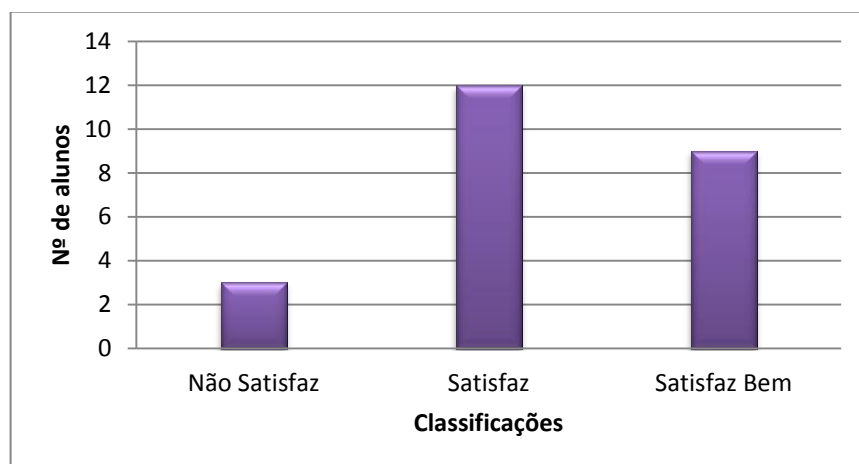
- b) A maioria dos alunos (16 de 24) obteve uma classificação igual ou superior a “Satisfaz”, no que concerne à CM – na perspectiva de capacidade matemática transversal (considerando a escala, em uso na escola, de três termos: Não Satisfaz, Satisfaz e Satisfaz Bem), conforme mostra o gráfico 2.

Gráfico 2 - Classificações obtidas pelos alunos no âmbito da CM



- c) Um grande número de alunos (21 de 24) obteve uma classificação igual ou superior a “Satisfaz”, na resolução de problemas – na perspetiva de capacidade matemática transversal (considerando a escala, em uso na escola, de três termos: Não Satisfaz, Satisfaz e Satisfaz Bem), conforme mostra o gráfico 3.

Gráfico 3 - Classificações obtidas pelos alunos no âmbito da Resolução de Problemas



3.3 Descrição do estudo

Neste ponto apresenta-se a descrição do estudo, segundo três etapas: seleção e reformulação de TI, planificação das sessões (que envolveu a realização de TI orientadas para a CM) e implementação das sessões.

3.3.1 Seleção e reformulação de tarefas de investigação

Atendendo às finalidades deste estudo, concretamente, i) selecionar e reformular TI para promover explicitamente capacidades de CM de alunos do 1º CEB e ii) implementar as TI reformuladas no contexto das aulas de matemática e avaliar os seus contributos para promover capacidades de CM de alunos do 1º CEB, foram ponderados vários critérios que nortearam a seleção de TI, concretamente, o serem tarefas:

- de natureza investigativa;
- adequadas ao 3º ano, tendo em consideração o preconizado no PMEB (Ponte *et al.*, 2007) na área de Matemática;
- apropriadas às características da turma;
- potencialmente promotoras da CM.

Tendo em conta os critérios estabelecidos, a AEI começou por realizar uma pesquisa em diversas fontes de informação, no campo da educação matemática, designadamente, teses, dissertações, livros, artigos e sítios da internet de organismos internacionais e nacionais. Posteriormente, a AEI efetuou uma seleção de TI, de diversos temas matemáticos subjacentes. Isto porque, como a planificação para o período de intervenção da AEI integrava todos os temas matemáticos, a articulação e integração curricular seria assegurada, assim como a PTT deu total liberdade à AEI para a escolha do tema matemático. Como não houve qualquer constrangimento, a AEI, nesta fase, selecionou TI no âmbito dos temas: Geometria e Números e Operações, decorrente de serem estes os temas subjacentes à generalidade das tarefas selecionadas e compiladas. A este respeito, Ponte e colaboradores (2006) salientam que as TI com o tema *números e operações*, contribuem para o desenvolvimento da compreensão global dos números e operações. No âmbito do tema *geometria*, os mesmos autores consideram que as TI contribuem para relacionar situações matemáticas com situações reais, entre elas, a visualização espacial. Sublinham, ainda, que a implementação de TI, no âmbito dos temas supramencionados, promove o desenvolvimento de capacidades matemáticas relevantes como a formulação e teste de conjecturas e procura de regras.

Uma vez seleccionadas as TI, procedeu-se à sua reformulação. Várias TI foram alvo de sucessivas reformulações até obter as versões finais. O processo de reformulação das tarefas foi fundamental, como forma de ampliar as potencialidades das mesmas, para assim, promover capacidades de CM (mediante a formulação de questões com esse foco). Para a efetivação deste propósito, foi elaborado e utilizado um referencial teórico, que permite identificar capacidades específicas e transversais ligadas à CM, baseado na revisão de literatura relativa à CM (Ponte *et al.*, 2007; NCTM, 2007; Tenreiro-Vieira *et al.*, 2010b). O quadro seguinte mostra as capacidades específicas e transversais ligadas à CM.

Quadro 1 - Capacidades de CM

Capacidades de CM			
Específicas		Transversais	
CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas		CT1 – Utilizar uma linguagem matemática clara	CT2- Utilizar uma linguagem matemática rigorosa
CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos			
CE3 – Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens	1. Para organizar informações, dados, resultados		
	2. Para testar ideias, relações, regularidades		
CE4 – Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática	1. Apresentar e justificar a sua posição 2. Compreender a posição de outrem 3. Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático 4. Negociar significado		

O referencial teórico foi usado para (re)formular os itens a integrar nos documentos escritos – Ficha de trabalho do aluno [FTA], maioritariamente, nos itens que impunham que o aluno recorresse à apresentação e justificação de resultados obtidos, teste e refinamento de conjecturas.

Das tarefas reformuladas, em função do número de sessões que foi possível dinamizar no âmbito do estudo, foram seleccionadas, para serem implementadas, em

contexto de sala de aula, as mais incitativas do uso de capacidades de CM, resultando em cinco documentos escritos – FTA (Apêndice B).

Em relação ao tema matemático integrante nas TI, pode-se verificar que o tema *números e operações* é constantemente manifesto. Desta forma, na tarefa que serviu para a avaliação final dos alunos, optou-se por uma tarefa com o tema matemático referido, dado que foi um tema presente em todas as TI realizadas.

3.3.2 Planificação das sessões

Nesta secção, primeiramente, de uma forma breve, descrevem-se os momentos base na organização do trabalho investigativo a desenvolver em sala de aula e, de seguida, mostra-se o processo de elaboração do GAEI.

3.3.2.1 Momentos base na organização do trabalho investigativo em sala de aula

Nesta parte focam-se os momentos base na organização do trabalho investigativo realizado em sala de aula, que ocorreu no contexto de PPS B2 da AEI, na turma de 3º ano de escolaridade. As diversas sessões, num total de cinco, caracterizadas pela implementação de TI, foram estruturadas de acordo com os três momentos referidos por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa, ii) desenvolvimento do trabalho e iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido. É de frisar que este foi o referencial que serviu de base à concretização das diversas sessões, o qual foi integralmente seguido na segunda, terceira e quarta sessões e ajustado na primeira e última sessões. Houve uma necessidade de ajustar o referencial nestas sessões, em concreto na abolição do último momento, dado que o objetivo destas era realizar uma caracterização inicial e uma avaliação final individual, respetivamente, ao nível da CM na vertente escrita.

i) Apresentação da tarefa

Como forma de introdução da TI, a AEI deve referir expressões/questões, tais como: *Os meninos gostam de efetuar descobertas/explorações? Daqui a pouco apresentarei uma situação na qual vocês terão que partir à descoberta; Vamos assumir o papel de matemáticos e fazer matemática*; de modo a incentivar os alunos para a realização da TI e a marcar a diferença em relação às outras tarefas que os alunos estão mais habituados.

A AEI deve distribuir a FTA referente a cada sessão (já que todas as tarefas serão fornecidas em suporte papel), a cada um dos alunos. Em seguida, deve realizar uma leitura oral de todos itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos e, explicar o sentido da proposta do trabalho de investigação (essencialmente na primeira tarefa).

A AEI deve referir que o trabalho a desenvolver depende, fundamentalmente, da iniciativa dos alunos, porém caso surja alguma dúvida ou questão que os mesmos não consigam ultrapassar, devem solicitar o apoio da AEI. Nas tarefas realizadas em grupo deve sublinhar que os alunos de um mesmo grupo devem cooperar entre si, na resposta às solicitações feitas. No âmbito das tarefas realizadas em grupo, a AEI deve, ainda, informar os alunos qual é o objetivo final do grupo, que o trabalho realizado pelos diferentes grupos será depois discutido/apresentado em grande grupo.

A fase de introdução de cada uma das TI não deve exceder os 10 minutos, para que os alunos não percam o interesse pela tarefa. Depois das diversas indicações introdutórias, se surgirem dúvidas, por parte dos alunos, a AEI deve esclarecer/clarificar no decorrer da atividade dos alunos, de modo a rentabilizar o tempo disponível para a implementação da sessão.

ii) Desenvolvimento do trabalho

No segundo momento a AEI deve observar e analisar como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar apoio, se necessário. Nesta fase, deve efetuar alguns registos de episódios relevantes relacionados com as questões de investigação, por exemplo, com as dificuldades em comunicar matematicamente, oralmente e por escrito; com os imprevistos surgidos e a sua forma de superação; com a motivação e interesse dos alunos na sequência das TI apresentadas; com os comentários dos alunos sobre as tarefas; com a organização/desenvolvimento do trabalho entre os alunos do grupo.

A AEI deve intervir em situações que se mostrem infrutíferas resultantes em impasses, impedindo, assim, a continuação da exploração da tarefa, por parte dos alunos. Algumas das questões a referir pela AEI nestas situações são: *Achas que estás no caminho certo? Lê bem o enunciado e verifica se é o que realmente é pedido. Essa regularidade aplica-se a todos os casos?* As questões formuladas aos alunos devem estimular o olhar em outras direções e a reflexão sobre o trabalho desenvolvido.

A AEI deve estimular a integração de conhecimentos matemáticos, explorados em aulas anteriores, no decurso da resolução da TI, com base em questões/comentários, em

função do tema/tópicos matemáticos integrantes na TI. Pode passar por formular questões de caráter aberto, recordar, fornecer ou promover a reflexão acerca de conteúdos matemáticos relevantes.

A AEI deve apelar para a importância da realização de registos escritos do trabalho de investigação. Para promover esta situação – execução do registo escrito – durante a realização do trabalho de investigação, a AEI pode fazer diversos comentários, por exemplo, *Não será melhor registares a forma como pensaste, pois pode ser fundamental no momento de apresentação e discussão do trabalho.*

iii) Apresentação e discussão do trabalho desenvolvido

No início deste momento, a AEI deve referir que os elementos dos outros grupos podem solicitar a palavra para intervir, tanto para fazer uma questão, como para fazer um comentário, aquando da apresentação de uma questão por um determinado aluno/grupo e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Todavia, a AEI, deve, sobretudo, garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação, evitando (ou contornando) a exploração de situações infrutíferas/incoerentes, apresentadas pelos alunos.

Algumas das questões, de caráter geral, a referir/explorar, nesta etapa, de modo a permitir um envolvimento e compreensão de todos os alunos, são: *Compreenderam o raciocínio deste grupo? Alguém tem dúvidas? Alguma questão que queiram formular a este grupo? Quem discorda da resposta do colega? Sem recorrer à tabela, poderíamos organizar os resultados de outra forma? Qual? Podemos generalizar os resultados para todos os casos? Porquê?*

A AEI deve, ainda, salientar o caráter divergente dos resultados obtidos numa investigação, para que assim os alunos se apercebam da postura que devem assumir nestas aulas de matemática, na medida em que uma TI pode gerar diversas formas de exploração, processos ou resultados.

É importante, também nesta fase, despertar os alunos para a importância da justificação matemática dos seus resultados e conjecturas, desenvolvendo assim o poder de comunicar matematicamente, reflexão e argumentação. A AEI deve solicitar, constantemente, que os alunos justifiquem, argumentem e reflitam sobre os processos, resultados e conjecturas apresentadas, com base em diversos comentários/questões, entre eles, *justifica as relações que estabeleceste; o que te leva a pensar que as relações que identificaste se verificam sempre?*

3.3.2.2 Elaboração do Guião da aluna estagiária investigadora

Antes da etapa da implementação das sessões, considerou-se fundamental proceder à planificação das sessões. Esta planificação resultou no GAEI (Apêndice A). O GAEI relativo a cada sessão está estruturado em duas partes, sendo que a primeira diz respeito ao enquadramento curricular da TI, com vista à promoção da CM, e a segunda parte apresenta orientações para a AEI no contexto da implementação de cada uma das sessões.

Assim, o enquadramento curricular consiste na integração de cada uma das TI, de acordo com o(s) tema(s) e objetivo(s) matemático(s), conforme o PMEB (Ponte *et al.*, 2007) (quadro 2). Apesar de não ter sido atendida a dimensão dos conhecimentos matemáticos, no âmbito deste estudo, considerou-se necessário identificar os objetivos específicos matemáticos subjacentes a cada TI. Tal como referido na revisão de literatura é importante, numa fase prévia, o professor delinear e ponderar sobre os objetivos pretendidos com a realização de TI e integrar os mesmos com base nas orientações curriculares, possibilitando também desta forma, um melhor desempenho, em contexto sala de aula, por parte do professor.

Quadro 2 - Designação, tema(s) e objetivo(s) de cada TI selecionada e reformulada

Sessões	Tarefas de investigação		
	Designação	Tema(s) matemático(s)	Objetivo(s)
1	Vamos encontrar regularidades (Apêndice B)	Números e Operações	<ul style="list-style-type: none"> Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação. Investigar regularidades numérica
2	Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel (Apêndice B)	Geometria Números e Operações	<ul style="list-style-type: none"> Identificar e representar retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, semi-retas e segmentos de reta, e identificar a sua posição relativa no plano Investigar regularidades numéricas
3	Dª Luísa e as escadas (Apêndice B)	Números e Operações	<ul style="list-style-type: none"> Investigar regularidades numéricas
4	Dobragens e um só corte (Apêndice B)	Geometria Números e Operações	<ul style="list-style-type: none"> Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações Investigar regularidades numéricas
5	À volta das tabuadas (Apêndice B)	Números e Operações	<ul style="list-style-type: none"> Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação. Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural Investigar regularidades numéricas

Ainda no enquadramento da tarefa, identificaram-se as capacidades ligadas à CM a que apelam os itens integrados na FTA referentes a cada uma das TI, conforme o quadro que se segue.

Quadro 3 - Capacidades de CM a desenvolver com a realização das TI

		Designação da FTA	Itens da FTA	Capacidades de CM					
				CE1	CE2	CE3		CT1	CT2
						CE3.1	CE3.2		
Sessões	1	<i>Vamos descobrir regularidades</i>	1	X				X	X
			2	X	X	X		X	X
			3	X		X		X	X
			4	X	X			X	X
	2	<i>Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel</i>	1			X		X	X
			2			X		X	X
			3	X	X			X	X
			4	X				X	X
			5			X		X	X
			6			X		X	X
			7	X	X			X	X
			8	X				X	X
	3	<i>D^a Luísa e as Escadas</i>	1	X	X			X	X
			2	X				X	X
			3				X	X	X
			4			X		X	X
			5	X				X	X
			6				X	X	X
			7	X				X	X
	4	<i>Dobragens e um só corte</i>	2	X	X			X	X
			3				X	X	X
			4			X		X	X
			5	X	X			X	X
			6				X	X	X
			7a	X				X	X
			7b	X				X	X
			7c			X		X	X
			8			X		X	X
	5	<i>Á volta das tabuadas</i>	1			X		X	X
			2	X				X	X
			3	X		X		X	X
			4		X			X	X
			5	X				X	X
			6	X				X	X
			7	X				X	X

Na segunda parte do GAEI constam diversas orientações para a AEI aquando da implementação de cada uma das TI. As orientações foram elaboradas de acordo com os momentos considerados por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa, ii) desenvolvimento do trabalho e iii) apresentação e discussão dos resultados (patentes no ponto 3.2.2.2). Salienta-se, também, que o referencial teórico (quadro 1) foi usado para promover

capacidades de CM, na vertente oral, nomeadamente, na elaboração/seleção de questões a formular durante o último momento da investigação, iii) apresentação e discussão dos resultados.

3.3.3 Implementação das sessões

Nesta secção apresenta-se a fase de implementação das sessões. Primeiramente mostra-se a calendarização das sessões e, de seguida, a descrição de cada uma das sessões implementadas pela AEI.

3.3.3.1 Calendarização

A calendarização final das diversas sessões, conforme o quadro 4, permite uma visão globalizante do número e da data de implementação das sessões, conforme efetivamente ocorrido, bem como a designação, tema matemático e o modo de trabalho de cada TI.

Quadro 4 - Calendarização das sessões

Sessões	Tarefas de investigação		Implementação		
	Designação	Tema(s) matemático(s)	Data	Duração	Modo de trabalho
1	Vamos encontrar regularidades (Apêndice B)	Números e Operações	12 de março de 2012	50 min	Individual
2	Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel (Apêndice B)	Geometria Números e Operações	10 de abril de 2012	2h e 30 min	Grupo (4 alunos)
3	D ^a Luísa e as escadas (Apêndice B)	Números e Operações	10 de maio de 2012	1h e 30 min	Grupo (2 alunos)
4	Dobragens e um só corte (Apêndice B)	Geometria Números e Operações	8 de junho de 2012	1h e 40 min	Grupo (2 alunos)
5	À volta das tabuadas (Apêndice B)	Números e Operações	11 de junho de 2012	1h	Individual

3.3.3.2 Descrição de cada uma das sessões implementadas pela AEI

Nesta secção apresenta-se a fase de implementação das sessões, no que diz respeito à descrição de cada uma das sessões implementadas pela AEI, no âmbito do estudo, que ocorreu no contexto de PPS B2, numa turma de 3º ano de escolaridade. Cada sessão é caracterizada pela implementação de uma TI (FTA – Apêndice B). Para que a descrição seguinte não se torne repetitiva, apresenta-se, de seguida, (essencialmente) os

aspectos diferenciados de cada sessão. Contudo, é de salientar que os momentos mencionados no ponto 3.3.2.1 foram atendidos nas sessões.

Sessão 1 - Tarefa: *Vamos descobrir regularidades*

A duração prevista para esta sessão – i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho – era uma hora. No entanto, a maioria dos alunos concluiu a TI após 50 minutos (aproximadamente) e uma minoria precisou de 60 minutos, tempo inicialmente atribuído, para finalizar a TI. À medida que os alunos concluíam a tarefa, a AEI solicitou-lhes que procedessem à correção de trabalhos revistos pela PTT e/ou à conclusão de trabalhos iniciados em aulas anteriores.

A organização dos alunos, na sala de aula, nesta sessão foi distinta da habitual. Antes da resolução da tarefa, a AEI solicitou que os alunos, dois a dois, se dispusessem frente a frente. Esta organização teve como fim garantir o trabalho individual, na medida em que, nesta sessão, pretendeu-se obter dados para uma caracterização inicial dos alunos quanto à CM, na vertente escrita.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introduzir a tarefa a AEI mencionou expressões/comentários: *Hoje vamos realizar uma tarefa de matemática diferente. É uma tarefa que envolve investigação matemática. Os meninos gostam de investigar/descobrir? De forma individual, os meninos vão dar o vosso melhor nesta tarefa e tentar fazer muitas descobertas fundamentadas.*

Posteriormente, a AEI distribuiu a FTA – *Vamos descobrir regularidades* (Apêndice B) – a cada um dos alunos, dado que esta TI foi realizada individualmente. Em seguida, realizou uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes pelos alunos, tais como, *múltiplos e regularidades*. Também referiu a duração da TI.

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – os alunos formularam muitas questões, essencialmente, questões de interpretação dos itens da FTA. Algumas das questões/comentários efetuados pelos alunos foram: *O que é para fazer na questão 1? Não consigo fazer nenhuma descoberta. Quais são os múltiplos de 2? Quais são os múltiplos de 5? Eu sei, mas não consigo explicar a razão.* A AEI informou os alunos que poderiam contar com o auxílio da AEI, porém a atividade dependia, essencialmente, dos alunos. A AEI esclareceu dúvidas pontuais, como as referidas anteriormente, de forma a garantir a atividade matemática por parte dos alunos, e também pelo facto de os alunos terem pouca experiência com investigações matemáticas, em contexto sala de aula.

No decorrer da resolução da tarefa, a AEI observou vários alunos inativos ou distraídos. Mediante estas situações a AEI fez diversos comentários/questões, tais como, *Tenta lá encontrar regularidades; Tenta ser mais claro e preciso nesta resposta; Vamos lá olhar com atenção para a tabela e tentar fazer novas descobertas; Certamente, como um investigador matemático, consegues fazer mais que uma descoberta, tenta encontrar mais algumas, não desistas. Por que razão há números pintados com três números? Explica o porquê destes dois números ficarem pintados com duas cores?*

No final da sessão, a AEI recolheu a FTA de cada aluno, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante ao uso de capacidades de CM.

Sessão 2 – Tarefa: *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*

A duração prevista para esta sessão era de 1 hora e 30 minutos – 1 hora para os dois primeiros momentos (apresentação da tarefa e desenvolvimento do trabalho) e 30 minutos para o terceiro momento (apresentação e discussão do trabalho desenvolvido). O tempo efetivo da sessão foi de 2 horas e 30 minutos (1 hora e 30 minutos para a apresentação da tarefa e para o desenvolvimento do trabalho, sendo que nenhum grupo conseguiu finalizar todos os itens; e 1 hora para a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido).

Os alunos nesta sessão foram organizados em 6 grupos, de 4 elementos. A AEI organizou os alunos em grupos habituais de trabalho. Os alunos manifestaram interesse e motivação para a realização da tarefa, essencialmente, pela mesma ser realizada em grupos de 4 elementos. Os alunos têm experiência com este modo de trabalho, nas diferentes áreas curriculares, porém, por norma, não se verifica uma grande rentabilidade e autonomia por parte dos alunos.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introdução da tarefa a AEI referiu expressões/questões: *Os meninos gostaram de efetuar a outra investigação? Hoje vão resolver uma nova tarefa na qual terão que partir à procura de descobertas.*

Posteriormente, a AEI distribuiu a FTA – *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel* (Apêndice B) – a cada um dos alunos. Em seguida, realizou uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes, tais como, *reta, segmento de reta, retas concorrentes.*

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – a AEI observou e analisou como o trabalho dos alunos se processou e prestou apoio, sempre que necessário. Os alunos não demonstraram dificuldades em responder ao primeiro item. Os alunos de dois grupos demonstraram muitas dificuldades em apresentar os dados na tabela (item 2). Não se recordavam qual o significado de uma tabela, nem a forma como organizar dados na mesma. Alguns alunos organizaram/apresentaram os dados em gráficos de barras. A AEI referiu algumas expressões/comentários de forma a apoiar os alunos: *Como é que vão organizar os dados na tabela? Como fazemos nas aulas quando queremos organizar dados em tabelas? Quais são os elementos chave para esta tabela? Se traçarmos 4 segmentos de reta vamos obter o quê? E se obtemos partes é fundamental traçar o quê?* No âmbito das tarefas realizadas em grupo, de sessão para sessão, o apoio facultado aos alunos foi decrescente, em particular no processo de construção de uma tabela.

Em vários grupos verificou-se que um ou dois alunos resolviam a TI, enquanto os restantes se limitavam a reproduzir o trabalho desenvolvido pelos colegas. Perante esta situação, a AEI repetiu que a resolução da tarefa dependia do trabalho e discussão de todos os elementos do grupo.

Alguns grupos necessitaram de muito tempo para a resolução de cada item, pois não chegavam a um “consenso” no grupo, manifestando deste modo dificuldades em trabalhar em grupo. A natureza destas tarefas requiere que seja fornecido tempo para os alunos pensarem e explorarem diversas situações, porém devido a restrições de tempo, a AEI referiu que os alunos não podiam despende um período de tempo longo para a resolução de um item, mas sim, tentar chegar a soluções corretas e lógicas, de uma forma mais rápida.

A AEI estimulou a integração de conhecimentos matemáticos, explorados em aulas anteriores, no decurso da resolução da TI, com base nas seguintes questões/comentários: *Qual a diferença entre uma reta e um segmento de reta? Para que haja interseção de todas as retas, o que tem de haver em comum?*

Apesar de nenhum grupo ter finalizado a tarefa, a AEI iniciou o terceiro momento – apresentação e discussão dos resultados – da sessão, pois o tempo disponível para a discussão era reduzido. No terceiro momento, a AEI referiu que os alunos não deveriam acrescentar nenhum registo nas FTA, nas quais constavam as resoluções iniciais.

No momento da discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos, a AEI solicitou que alunos de diferentes grupos apresentassem os seus raciocínios e o trabalho desenvolvido, junto ao quadro, de frente para os restantes colegas. Durante a

apresentação do trabalho desenvolvido, os alunos evidenciaram estar atentos às apresentações dos colegas. As respostas aos itens foram apresentadas e discutidas, pela sequência da FTA – *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel* (cf. anexo G – transcrição da gravação áudio do momento da apresentação e discussão do trabalho desenvolvido da sessão 2).

Durante a apresentação e discussão do primeiro item, foram exploradas diversas questões, tais como: *Com 3 segmentos de reta, quantas partes obtiveram? Podes agora exemplificar aos teus colegas como chegaste a esse resultado. Todos obtiveram 6 partes?* Neste item também foram exploradas questões do tema Geometria, como por exemplo: *Os segmentos podiam ser traçados paralelamente? Porquê?* A resposta de uma aluna a esta questão foi: *Porquê os segmentos de reta não se cruzam ... não se encontram.* Outra questão foi: *Como se designam os segmentos que se cruzam no mesmo ponto?* Duas alunas responderam: *concorrentes.*

No segundo item a AEI solicitou que um aluno representasse no quadro a tabela, tal como na sua resolução. Neste item foram exploradas diversas questões, tais como: *Todos têm duas colunas? Explica por que fizeram assim? Por que razão tu e a maioria dos alunos colocaram na primeira coluna “segmentos de reta” e na segunda coluna “partes”?* A esta última questão a aluna respondeu: *Porque os segmentos de ... para sabermos o número de partes, temos de saber quantos segmentos de reta é que estão aqui (a aluna ao mesmo tempo que explica indica na tabela).* Neste item foram exploradas diversas formas de apresentação dos dados a partir de tabelas propostas pelos alunos, nomeadamente, a precisão, a clareza, o rigor, a organização e a compreensão dos dados a constar na tabela.

Os itens 3 e 4 foram apresentados e discutidos simultaneamente. Os alunos compreenderam que o número de partes obtidas é sempre o dobro dos segmentos de reta traçados. A título de exemplo é resposta do aluno: *As partes é que são o dobro dos segmentos.* Também foram formuladas questões “invertidas”, tais como, *Se eu obtivesse 10 partes, quantos segmentos de reta é que eu teria que traçar?* A maioria dos alunos não demonstrou dificuldades em compreender este “raciocínio invertido”.

Quase todos os grupos responderam corretamente aos primeiros quatro itens, todavia evidenciaram dificuldades em comunicar de forma precisa e rigorosa os processos utilizados, os raciocínios matemáticos e os resultados obtidos.

Os itens 5, 6, 7 e 8 da FTA foram resolvidos/explorados no momento da discussão e apresentação do trabalho desenvolvido, já que nenhum grupo conseguiu finalizar os mesmos.

A AEI recorreu a uma apresentação em *PowerPoint* (Apêndice H) para uma melhor compreensão e visualização das situações indicadas na FTA. Primeiramente apresentou de forma breve a resolução dos itens 1, 2, 3 e 4, visto que os itens em questão já haviam sido explorados. De seguida, a AEI apresentou a resolução dos restantes itens, e em simultâneo, a AEI explorou com os alunos os mesmos.

Os alunos manifestaram muitas dificuldades em interpretar a situação do item 5. Para uma melhor compreensão deste item, algumas das questões exploradas nesta situação foram: *Quais são as diferenças entre a situação presente no item 1 e a presente neste item? Nesta situação é obrigatório que todos os segmentos de reta intersetem o mesmo ponto? Com 3 segmentos de reta, será que a tira de papel ficará dividida em mais partes do que na primeira situação? Em quantas partes fica dividida a tira de papel se se traçar 3 segmentos de reta? Algum grupo obteve outra resposta?* A apresentação da resolução do item 5 (se se traçar 3, 4 e 5 segmentos de reta na tira de papel) foi baseada em esquemas. Os alunos demonstraram interesse e surpresa com a apresentação (Apêndice H), pois surgia um ponto de cada vez de acordo com as partes obtidas. Todos os alunos fizeram a contagem das partes obtidas, à medida que surgiam os pontos.

Depois a AEI apresentou a resolução dos itens 6, 7 e 8, a partir de uma tabela. Os aspetos da tabela (linhas, colunas, títulos) surgiam na apresentação, após uma breve discussão e depois de os alunos referirem respostas corretas. De modo a que os alunos chegassem às respostas corretas, durante a apresentação da resolução do item 6 (construção de uma tabela com os dados obtidos na resposta 5) algumas das questões exploradas foram: *Quais são critérios que devemos ter em consideração para a construção desta nova tabela? Será semelhante à tabela construída na primeira situação? Como apresentaremos os dados na tabela? Quais são os títulos que devem constar na tabela? Por que razão é importante que os nomes dos títulos sejam precisos e rigorosos?* Com base nos aspetos discutidos no item 2, neste item, os alunos usaram uma linguagem matemática mais clara e rigorosa.

Os itens 7 e 8 foram apresentados e discutidos em paralelo. Algumas das questões exploradas foram: *Por que razão a resposta é 15? Qual foi o vosso raciocínio? Algum grupo pensou de outra forma? Qual é a regra que podemos concluir nesta situação? Será*

possível encontrar outra regra para satisfazer as condições descritas? Justifica a tua resposta.

Os alunos, de forma individual, não conseguiram encontrar *o número de partes obtidas se se traçar 7 segmentos* (item 7), nem a regra, solicitada no item 8. Contudo, por meio do método de *tentativa e erro*, bem como com o auxílio de questões efetuadas pela AEI (essencialmente, relativas ao sucedido para os outros casos, com 3, 4 e 5 segmentos de reta), alguns alunos conseguiram encontrar a regra pretendida.

Os alunos demonstraram interesse pela situação expressa na FTA (item 5), na medida em que após a apresentação e discussão da regra em causa, tentaram descobrir outras regularidades.

No final da sessão, a AEI recolheu a FTA de cada aluno, com a resolução inicial, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos, no tocante ao uso de capacidades de CM.

Sessão 3 – Tarefa: *D^a Luísa e as Escadas*

A duração prevista para esta sessão era de 1 hora e 15 minutos – 45 para os dois primeiros momentos (apresentação da tarefa e desenvolvimento do trabalho) e 30 minutos para o terceiro momento (apresentação e discussão do trabalho desenvolvido). O tempo efetivo da sessão foi de 1 hora e 30 minutos (1 hora e 10 minutos para a apresentação da tarefa e para o desenvolvimento do trabalho, sendo que nenhum grupo conseguiu finalizar todos os itens; e 30 minutos para a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido).

Os alunos nesta sessão foram organizados a pares, visto que na segunda sessão se verificou reduzida rentabilidade ao nível do trabalho desenvolvido pelos diferentes grupos. Assim, a organização dos alunos, na sala de aula, foi a habitual. Normalmente, os alunos estão dispostos numa secretária dois a dois, permitindo assim o trabalho a pares.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introdução da tarefa a AEI referiu expressões/questões: *Hoje, mais uma vez, terão que partir à descoberta. Assumirão um papel de verdadeiros matemáticos.*

Posteriormente, a AEI distribuiu a FTA – Tarefa: *D^a Luísa e as Escadas* (Apêndice B) – a cada um dos alunos da díade. De seguida, realizou uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes, tais como, *degraus, escada, salto, passo, conjectura*.

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – a AEI observou e analisou como o trabalho dos alunos se processou e prestou apoio, sempre que necessário. Os

alunos demoraram algum tempo a iniciar a mesma. Muitos grupos evidenciaram dificuldades em encontrar *o número de modos diferentes de subir x degraus* solicitado no item 1, na medida em que não conseguiam distinguir/representar as duas formas de subir os degraus: salto (passa por cima de um degrau) e passo. De modo a contornar esta situação e como foi uma situação vivenciada por muitos grupos, a AEI explicou no quadro, para o grande grupo, as formas possíveis de subir 2 degraus. No geral, em cada díade havia um aluno que assumia a liderança, levando o grupo a centrar-se em ideias e facilitando o trabalho do grupo. Os alunos demonstraram interesse em encontrar um elevado *número de diferentes formas de subir 4 e 6 degraus* (itens 3 e 6, respetivamente).

Antes de os alunos concluírem a TI, a PTT frisou que se a AEI não iniciasse o momento – apresentação e discussão do trabalho desenvolvido, o tempo disponível, para o momento em questão, seria insuficiente ou muito reduzido. Posto isto, iniciou-se o terceiro momento. A AEI referiu para não efetuar registos na FTA, nas quais constavam as resoluções iniciais e distribuiu folhas quadriculadas, a cada um dos alunos, para procederem ao registo das respostas aos itens da tarefa, no âmbito da discussão. A maioria dos alunos evidenciou dificuldades em transcrever a resolução da tarefa e, em simultâneo, participar e prestar atenção à discussão e apresentação do trabalho desenvolvido. Como a estratégia adotada não foi adequada, a AEI referiu que era preferível que os alunos estivessem atentos e interviessem na discussão. Se no final da aula restasse tempo, os alunos efetuavam a transcrição da resolução da tarefa.

No momento da discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos, a AEI, solicitou que alunos, de diferentes grupos, apresentassem os seus raciocínios e o trabalho desenvolvido, junto ao quadro, de frente para os restantes colegas. Durante a apresentação do trabalho desenvolvido, os alunos evidenciaram estar atentos às apresentações dos colegas. As respostas aos itens foram apresentadas e discutidas, pela sequência da FTA – *D^a Luísa e as Escadas*. Em alguns itens (3 e 6) a AEI estabeleceu uma ordem de apresentação dos grupos, na qual os grupos que haviam identificado um menor número de formas de subir as escadas seriam os primeiros a intervir (já que a AEI havia observado o desenvolvimento do trabalho dos alunos no segundo momento da TI).

No primeiro item, a maioria dos alunos respondeu corretamente. Durante a apresentação e discussão do item 1 foram exploradas diversas questões, tais como: *Quantos modos tem a D. Luísa para subir 1 degrau? 2 degraus? 3 degraus? Explica como pensaste? Todos os grupos conseguiram encontrar os três modos possíveis para*

subir três degraus? Qual foi a estratégia que usaram para apresentar as diferentes formas de subir os degraus?

No item 2 os alunos estavam receosos de manifestar a sua resposta, como ilustrado no seguinte comentário: *a minha resposta foi 4 mas sei que está errada*, pois ao fazer o teste da conjectura solicitado no item três, verificaram que a conjuntura formulada no item 2, não se confirmava. A AEI solicitou que o aluno justificasse o seu raciocínio e a resposta do aluno foi: *Porque ali, se com 1 degrau era uma forma, com dois degraus era duas formas, com 3 degraus era três formas, 4 degraus 4 formas*. A AEI salientou que o desejável era que os alunos justificassem a sua resposta e não deveriam se preocupar, se a resposta estava errada ou não. Assim, algumas das questões exploradas no item 2 foram: *Por que razão a resposta é 4? Como pensaram? Algum grupo pensou de outra forma?*

No item 3, alguns alunos demonstraram dificuldades em distinguir os dois termos: passo e salto. Atendendo a esta situação, a AEI, solicitou que um aluno, primeiramente, explicasse através da prova e depois apresentasse no quadro as duas situações, com diferentes cores. Foi fundamental realçar, também, que a D^a Luísa só podia saltar um degrau, dado que alguns alunos formularam a hipótese da D^a Luísa saltar mais do que um degrau. Após isto, os alunos perceberam as condições da situação apresentada. Algumas das questões exploradas durante a exploração do item 3 foram: *A vossa conjectura confirma-se? Por que razão é importante testar a formulação de uma conjectura?* 8 alunos conseguiram encontrar as cinco formas possíveis e corretas de subir 4 degraus.

A AEI, em conjunto com os alunos, no item 4, explorou um exemplo de uma tabela adequada e outro de uma inadequada, propostas por dois grupos, de modo a que os alunos percebessem que, por vezes, determinado tipo de organização de dados numa tabela não é viável. No exemplo que se segue (apresentada por um grupo) os alunos compreenderam que não era viável, uma vez que se quiséssemos apresentar um elevado *número de degraus*, a tabela se tornaria muito extensa.

Nº de degraus	Possibilidades						
	1	2	3	4	5	6	7
1	x						
2		x					
3			x				
4					X		

Durante a exploração da organização e construção da tabela, a maioria dos alunos utilizaram uma linguagem matemática mais adequada e precisa, relativamente à linguagem utilizada, aquando da elaboração da tabela realizada na sessão anterior. Por

exemplo, para identificar os títulos das duas colunas da tabela alguns alunos referiram: *número de degraus* e *número de diferentes formas de subir as escadas*. Algumas questões exploradas neste item foram: *Como representaram os dados na tabela? Quais são os títulos que devem constar na tabela? Os nomes dos tópicos devem ser precisos e rigorosos? Justifica a tua resposta. Esta tabela é adequada? Porquê?*

O tempo disponível para a conclusão da apresentação e discussão do trabalho desenvolvido era reduzido. Assim, os restantes itens foram explorados simultaneamente. Como muitos grupos não resolveram os itens 5, 6 e 7, durante a apresentação e discussão do item 5, alguns alunos referiram conjecturas ilógicas, concretamente, *eu pensei que eram 13, porque sabia que eram muitas... então eu fiz ... o dobro, e como pensei que era mais, pensei que era mais um*. A AEI solicitou que os alunos prestassem atenção à tabela e formassem conjecturas com uma razão fundamentada para a situação do item 5. Apenas um grupo respondeu corretamente ao item 5 (grupo do aluno que respondeu 13 formas), porém com uma explicação do seu raciocínio ilógica. Daqui deduz-se que a resposta foi em função do teste efetuado no item 6. Uma aluna conseguiu explicar a regra pretendida no item 7 por meio do método de *tentativa e erro*, bem como com o auxílio de questões efetuadas pela AEI e pela observação do sucedido para os outros casos. Após a explicação do raciocínio da mesma, a maioria dos alunos compreendeu qual era a regra subjacente à situação. De modo a garantir que todos os alunos perceberam a regra subjacente à situação apresentada foram explorados vários exemplos. Algumas das questões exploradas nesta situação foram: *Por que razão afirmam que a resposta a esta questão é 13? Como pensaram? Expliquem o vosso raciocínio. A vossa conjectura confirma-se? Quantos modos de subir as escadas, a D.^a Luísa tem para subir 7 degraus? Se eu quisesse saber o número de formas de subir a escada com 15 degraus, como procederia? Será que para descobrir número de formas com 6 degraus, é fundamental descobrir o número de formas de subir 5 degraus?*

No final da sessão, a AEI recolheu a FTA de cada aluno, com a resolução inicial e as resoluções efetuadas nas folhas quadriculadas, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos, no tocante ao uso de capacidades de CM.

Depois do final da sessão, a PTT e a AEI, em discussão, constataram que os alunos com classificações medianas, na área de matemática, demonstraram um melhor desempenho nesta tarefa, ao invés dos alunos com excelentes classificações nesta área. Uma possível razão para o sucedido prende-se com o facto de os alunos com melhores

classificações nesta área, por norma, “complicam” o solicitado pelo professor, resultando muitas vezes em impasses.

Sessão 4 – Tarefa: *Dobragens e um só corte*

A duração prevista para esta sessão era de 1 hora e 30 minutos – 1 hora para os dois primeiros momentos (apresentação da tarefa e desenvolvimento do trabalho) e 30 minutos para o terceiro momento (apresentação e discussão do trabalho desenvolvido). O tempo efetivo da sessão foi de 1 hora e 40 minutos (1 hora e 20 minutos para a apresentação da tarefa e para o desenvolvimento do trabalho; e 20 minutos para a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido).

À semelhança da sessão anterior, a TI desta sessão foi efetuada a pares, onde cada aluno trabalhou com o colega sentado na mesma secretária.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introdução da tarefa, a AEI referiu a expressão: *Mais uma vez vamos explorar uma situação matemática na qual vocês assumirão o papel de pequenos investigadores matemáticos.*

Posteriormente, a AEI distribuiu a FTA – *Dobragens e um só corte* (Apêndice B) – aos alunos, em suporte papel. A AEI distribuiu a primeira parte da FTA a cada um dos alunos. A segunda parte da FTA foi distribuída após 30 minutos. Não foi entregue a FTA na totalidade, pois no item 4 era pretendido que os alunos construíssem uma tabela e se a FTA não fosse entregue parcialmente, os alunos tinham como modelo a tabela patente item 7. Além da FTA, a AEI distribuiu a cada um dos alunos várias folhas A₄ brancas, para efetuarem cortes nas mesmas conforme solicitações da FTA. Em seguida, realizou uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes, tais como, *dobragens, figuras e relações*.

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – a AEI observou e analisou como o trabalho dos alunos se processou e prestou apoio, quando necessário. No caso concreto desta sessão, os alunos evidenciaram muitas dificuldades nos cortes solicitados nos itens da FTA. Com o efeito, a AEI apoiou os alunos neste processo. Alguns alunos repetiram os mesmos erros (itens 1, 3, 6), após a explicação/exemplificação de como se procediam os cortes.

Antes de iniciar o terceiro momento – apresentação e discussão do trabalho desenvolvido – a AEI referiu que os alunos não deviam acrescentar registos na FTA, nas quais constavam as resoluções iniciais. A AEI nesta sessão solicitou que os alunos estivessem atentos à apresentação e participassem na discussão do trabalho desenvolvido,

ao invés de efetuarem a transcrição da resolução numa folha à parte, por dois motivos, i) o tempo disponível para este momento era reduzido e ii) os alunos mostraram dificuldades em efetuar a transcrição da resolução e, simultaneamente, prestar atenção à apresentação e participar na discussão do trabalho, desenvolvido na última sessão.

Para rentabilizar o tempo disponível para este momento, concretamente 20 minutos, a AEI optou por despendar mais tempo na apresentação e discussão do item 7 da FTA, dado que este item permitia um maior número de oportunidades de apelar a capacidades de CM. Os primeiros seis itens foram discutidos de uma forma muito breve, dado que ao longo do segundo momento a AEI verificou que todos os alunos atenderam corretamente às solicitações da FTA. Nos itens 2 e 5, a AEI solicitou que diferentes grupos referissem a sua resposta e justificassem o porquê da mesma. Foi importante a AEI compreender o porquê dos alunos optarem por um determinado número de figuras obtidas, permitindo assim despertar os alunos para a importância da justificação matemática das suas conjecturas, e por conseguinte, desenvolver o poder de comunicar matematicamente. No quarto item, a AEI explorou diferentes propostas de apresentação dos dados, a partir de uma tabela, e sua eficácia/pertinência. Algumas das questões exploradas ao longo dos primeiros seis itens foram: *Quantas figuras obtiveram com 6 dobragens? Será que a partir dos dois casos explorados, podemos generalizar para todos os casos? Justifica a tua resposta. Quais os títulos que devem constar na tabela? Quantos casos foram explorados?*

Nenhum grupo conseguiu encontrar as relações pretendidas nos itens 7a e 7b, de uma forma correta. No item 7a, um aluno referiu a mesma relação explorada na última sessão, mas depois verificou que não se aplicava a esta situação. Outro aluno conseguiu verificar/explicar a relação pretendida no item 7a e 7b (através do processo de recorrência) com base em questões efetuadas pela AEI, e pela observação de regularidades patentes na tabela. Após a explicação do raciocínio do aluno, pelo processo de recorrência, a maioria dos alunos compreendeu quais eram as relações pretendidas. Foram explorados vários exemplos, de modo a garantir que todos os alunos percebessem a regra subjacente à situação apresentada.

Durante a discussão dos itens 7b e 7b, a AEI estimulou outra questão matemática, relativa ao número total de lados das figuras obtidas, *Conseguem descobrir alguma relação, sem recorrer ao processo de recorrência?* Nesta relação estava implícito o conceito de potência, porém, neste nível de escolaridade não foi abordado desta forma, mas sim de uma forma implícita, pois não são tópicos presentes no PMEB (Ponte *et al.*,

2007) do 3º ano. Inicialmente, os alunos tiveram dificuldades em perceber esta relação, porém após a observação atenta da tabela, assim como de questões formuladas pela AEI (tais como, *O que acontece de um caso para outro? É sempre o dobro? Com duas dobragens multiplica-se o dois duas vezes?*) um aluno descobriu a relação supramencionada, ilustrada a partir da seguinte intervenção: *ah já sei, é sempre multiplicar o 2 as vezes do número de dobragens, por exemplo, para saber com 3 dobragens é $2 \times 2 \times 2$* . Os alunos compreenderam que desta forma não é necessário recorrer ao processo de recorrência, como no caso anterior.

Posto isto, e mediante as relações descobertas/verificadas anteriormente, no item 7c, os alunos preencheram as duas últimas linhas do quadro. O item 8 não foi apresentado, nem discutido na sessão, na medida em que no mesmo pretendeu-se apelar, fundamentalmente, capacidades de CM, na vertente escrita.

No final da sessão, a AEI recolheu a FTA de cada aluno, com a resolução inicial e as folhas brancas com cortes, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos, no tocante ao uso de capacidades de CM. Alguns alunos solicitaram as folhas brancas com cortes, com intuito de expor/explicar aos pais o teor do trabalho realizado em sala de aula.

Sessão 5 – Tarefa: À volta das tabuadas

A duração prevista e efetiva desta sessão foi 1 hora (apresentação da tarefa e desenvolvimento do trabalho). A maioria dos alunos concluiu a TI em 40 minutos, porém alguns alunos finalizaram a tarefa no tempo estipulado.

À semelhança da primeira tarefa, a organização dos alunos, na sala de aula, nesta sessão foi distinta da habitual. Antes da resolução da tarefa, a AEI solicitou que os alunos, dois a dois, se dispusessem frente a frente. Esta organização teve como fim garantir o trabalho individual, na medida em que se pretendeu obter dados para uma avaliação final dos alunos ao nível das capacidades de CM, na vertente escrita.

Antes de iniciar a sessão, a AEI assegurou que todos os alunos possuíam uma calculadora básica, pois este instrumento era fundamental para a resolução da TI em questão.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introdução da tarefa, a AEI referiu expressões como: *Esta é outra situação na qual vocês assumirão o papel de investigadores matemáticos. Hoje, vão se empenhar, tal e qual, os matemáticos.*

A AEI distribuiu a FTA – *À volta das tabuadas* (Apêndice B) – a cada um dos alunos, dado que esta tarefa foi realizada individualmente. Foi efetuada uma leitura de todos os itens relativos à TI e referida a duração para a resolução da mesma.

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – a AEI circulou pela sala e nos primeiros quinze minutos deste momento esclareceu dúvidas, principalmente, sobre o manuseamento da calculadora. A AEI previu estas dificuldades por parte dos alunos. Com efeito, no dia anterior à sessão, recomendou que os alunos treinassem em casa, com a ajuda dos pais, o manuseamento das calculadoras, porém a maioria dos alunos não atendeu ao solicitado.

Também esclareceu dúvidas sobre a interpretação dos itens da FTA, a uma minoria dos alunos, essencialmente, no início do desenvolvimento do trabalho. Algumas das questões não eram objetivas. Exemplos dessas questões foram: *O que é para fazer? Não percebo, pode explicar o que quer dizer esta questão? Professora, aqui não existe nenhuma regularidade, não é verdade?*

Alguns itens da FTA do aluno não solicitavam, explicitamente, a apresentação de determinada explicação (item 4), nem a apresentação de determinada regularidade (item 5). A AEI apercebeu-se desta ocorrência e neste caso apelou aos alunos, insistentemente, para a necessidade de apresentar todas as regularidades, relações e explicações encontradas.

Alguns alunos concluíram o trabalho desenvolvido muito prontamente, todavia, a AEI incentivou os alunos a resolver todos os itens da FTA, dado que muitos alunos não resolveram muitos itens da FTA. Algumas das expressões mencionadas pela AEI para alcançar este fim foram: *Tenta encontrar uma relação da primeira para a segunda linha. Toma atenção aos números da primeira linha e da segunda linha. A relação encontrada na questão 2 é a mesma para os três novos números? Após a realização de várias tarefas de investigação, os meninos agora devem ser capazes de descobrir mais regularidades? Vamos lá olhar com atenção para a tabela; Já conseguiste fazer uma descoberta, certamente, consegues encontrar mais algumas. Será que a regularidade encontrada na questão 5 aplica-se aos múltiplos de 3, 5 e 8? Qual é a conjectura que podes formular tendo por base as regularidades encontradas nas questões 5 e 6?*

No final da sessão, a AEI recolheu a FTA de cada aluno, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos, no tocante ao uso de capacidades de CM.

3.4 Recolha de dados

Para recolher dados que permitissem responder às questões de investigação formuladas, utilizaram-se diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados. Tendo por base a organização e terminologia de Tenbrink (1984), no presente estudo foram utilizados instrumentos de recolha de dados inseridos no âmbito das técnicas: observação, inquérito e análise. O esquema seguinte evidencia os instrumentos de recolha de dados usados, em função da técnica em que se inserem, e o momento de aplicação dos mesmos no decorrer deste estudo.

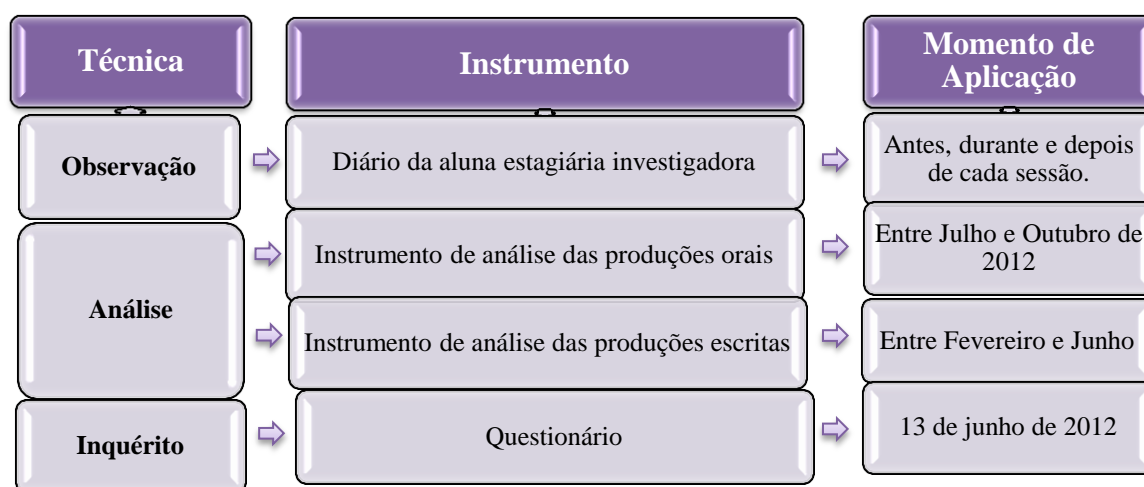


Figura 6 - Técnicas e instrumentos utilizados na recolha de dados e respetivo momento de aplicação

A técnica de recolha de dados – *observação* – foi uma das usadas no âmbito deste estudo. De acordo com Tenbrink (1984), a observação “es el proceso de mirar y escuchar, dándose cuenta de los elementos importantes de una realización o produto” (p. 135). O autor acrescenta que esta técnica é adequada para obter informação sobre o comportamento típico dos alunos em diversas situações como, por exemplo, durante a realização de discussões e a participação dos alunos, nas diversas atividades propostas em contexto de sala de aula. Esta técnica foi usada quando a AEI registou, no seu diário de bordo, ocorrências observadas relevantes para o presente estudo, durante e após (na sequência da aulas de matemática dos alunos, enquanto aluna/estagiária) a implementação de cada sessão.

A *análise* foi outra das técnicas usadas neste estudo, a qual, segundo refere Tenbrink (1984), “es esencialmente el proceso de dividir algo en sus componentes, romperlo “para averiguar” de qué está hecho” (p. 135). O autor salienta ainda que esta técnica permite ao professor/investigador obter uma grande quantidade de informação,

analisando cuidadosamente o trabalho do aluno, patente, por exemplo, nas suas produções escritas no contexto de tarefas realizadas. No âmbito deste estudo, a análise documental incidiu sobre as produções escritas dos alunos, que correspondem às respostas escritas dadas pelos mesmos às questões formuladas em cada FTA. Incidiu ainda sobre as produções orais dos alunos decorrentes das transcrições das gravações áudio das sessões (2, 3 e 4).

No âmbito da técnica de análise documental, usaram-se dois instrumentos construídos na sequência do presente estudo. Um deles foi o instrumento de análise das produções escritas (Apêndice E). Outro foi o instrumento de análise das produções orais (Apêndice D).

O *inquérito* foi outra das técnicas utilizadas neste estudo. Tenbrink (1984) considera que esta técnica permite obter uma grande quantidade de informação. O autor refere que “la información sobre actitudes, intereses y relaciones interpersonales se puede normalmente obtener con más eficiencia a través de entrevistas, cuestionarios y técnicas sociométricas – los instrumentos básicos de la interrogación” (p. 135). Neste estudo, o instrumento usado, no âmbito desta técnica, foi o questionário, aplicado aos alunos após as sessões dinamizadas mediante a implementação de TI, orientadas para o promover capacidades de CM dos alunos.

De seguida, descreve-se cada um dos instrumentos utilizados na recolha de dados.

3.4.1 Diário da aluna estagiária investigadora

Segundo Tenbrink (1984) os quatro instrumentos de observação comumente usados em investigação em educação são: *diários*, listas de verificação, escalas de avaliação e escalas de organização. Segundo a caracterização dos instrumentos em questão, o diário da AEI (designação empregue pela AEI) insere-se na categoria dos *diários*, dado que estes são caracterizados por descrições escritas de ações/intervenções dos alunos. O autor considera que este tipo de instrumento é apropriado para obter informação sobre diferentes alunos sem ocorrer comunicação, a partir da observação. Igualmente, o professor pode registar uma grande variedade de comportamentos dos alunos e tomar nota de situações ocorridas, relevantes para futuras intervenções do professor. Por seu turno, Sousa (2009) defende que este instrumento é importante para o registo de diversas situações ocorridas durante as aulas, entre elas, o interesse dos alunos, caminhos alternativos, observações pertinentes. O autor acrescenta que este instrumento

deve ser criado ao longo das diversas sessões, em que as páginas são constituídas por diversos aspetos, entre eles relatos de cada sessão, tal como sucedido neste estudo.

Com efeito, o diário da AEI foi o instrumento onde a mesma efetuou diversos registos/notas de campo, durante e após as sessões implementadas. Os registos foram elaborados com base nas observações da AEI no decorrer das diversas sessões e nas considerações referidas pela orientadora cooperante e pelo colega de estágio da AEI. Os registos reportam a observações relativas: (i) às dificuldades manifestadas pelos alunos em comunicar os seus raciocínios e em interpretar as questões incluídas na FTA referente a cada TI implementada; (ii) ao tempo despendido na resolução de cada tarefa; (iii) às reações dos alunos a cada uma das tarefas apresentadas; (iv) à organização/desenvolvimento do trabalho, entre os alunos de cada grupo; (v) imprevistos surgidos e como foram ultrapassados; e (vi) comentários dos alunos sobre as sessões implementadas. Ainda, o diário de bordo da AEI possui registos resultantes de reflexões sobre determinadas situações ocorridas durante e após as sessões, relevantes para as futuras sessões.

3.4.2 Instrumentos de análise das produções dos alunos

Tal como referido, a análise documental incidiu sobre as produções dos alunos, tanto das produções escritas, que correspondem às respostas escritas dadas pelos mesmos às questões formuladas na FTA referente a cada TI realizada em cada sessão implementada em sala de aula, bem como às produções orais dos alunos decorrente das transcrições das gravações áudio das sessões (2, 3 e 4), possibilitando, assim, aceder aos discursos ou produções orais alunos, mediante a reprodução da gravação áudio das mesmas.

No que diz respeito, às produções orais dos alunos, Coutinho (2011) considera que a audiogravação é uma ferramenta preciosa ao serviço do sujeito que realiza um estudo. Sousa (2009) acrescenta que os instrumentos de gravação, nos últimos tempos, têm assumido um papel fundamental e quase obrigatório em estudos na área da educação. Estes instrumentos permitem um registo fidedigno e completo das situações. São ferramentas que possibilitam que diversos sujeitos possam ouvir, analisar, parar, voltar atrás, rever/reouvir, repetindo as vezes desejadas, em alturas diferentes, sem ser necessário terem estado no local onde sucederam os acontecimentos (Sousa, 2009).

Neste estudo, o instrumento de gravação áudio foi utilizado nas sessões 2, 3 e 4, nas quais foram concretizados os três momentos característicos de uma aula de investigação: i) apresentação da tarefa, ii) desenvolvimento do trabalho e iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido. É de salientar, que este instrumento foi utilizado para registar o momento iii), dado que foram momentos vivenciados em grande grupo. Era complexo proceder à gravação dos três momentos de uma TI, atendendo ao modo de trabalho adotado no momento ii) nas sessões: pequenos grupos ou pares.

Os registos áudio, das sessões referidas, foram transcritos usando convenções adaptadas de Martins (1989) (Apêndice F). A cada aluno (A), da turma do 3º ano de escolaridade, foi atribuído um número, de forma a manter o anonimato. A título ilustrativo, apresenta-se em apêndice (apêndice G) um exemplo da transcrição do momento referente à apresentação e discussão do trabalho desenvolvido, no âmbito da sessão 2. Para fazer a análise das produções orais (sessões 2, 3 e 4) foi construído um instrumento de análise (Apêndice D) tendo por base o referencial teórico (quadro 1) relativo às capacidades de CM específicas, CE4.1, CE4.2, CE4.3 e CE4.4. Foi tomada esta decisão, porque com este instrumento pretendeu-se identificar as capacidades de CM, na vertente oral. Com efeito, as capacidades específicas de análise em questão são concernentes a esta vertente da CM. O instrumento de análise construído possui a mesma estrutura e categorias de análise, para as três sessões.

Para fazer a análise das produções escritas dos alunos, foi construído um instrumento de análise (Apêndice E), tendo por base o referencial teórico (quadro 1) referente às capacidades de CM específicas (CE1, CE2 e CE3) e transversais (CT1 e CT2), de modo a identificar as capacidades de CM, na vertente escrita, mobilizadas pelos alunos. O quadro de referência foi usado e plasmado no instrumento de análise construído, para cada uma das sessões, tendo em conta o solicitado em cada item de cada TI implementada.

3.4.3 Questionário

O questionário aplicado aos alunos da turma do 3º ano (Apêndice C) foi concebido com o propósito de recolher dados para responder a questões formuladas, concretamente, QI3 – Quais as representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação de TI? e QI4 – Qual a opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI orientadas para o promover as suas capacidades de CM?

Assim, Coutinho (2011) considera que este instrumento visa a obtenção de respostas expressas pelos participantes num estudo. Segundo Sousa (2009), o questionário é utilizado numa investigação para se obter informação diretamente proveniente dos sujeitos, neste caso concreto, dos alunos, que depois se convertem em dados suscetíveis de serem analisados.

Neste estudo optou-se por usar este instrumento, ao invés da entrevista, pois pretendia-se recolher dados de uma forma eficaz, rápida e com poucos custos. Segundo Sousa (2009), o questionário pode ser aplicado, simultaneamente, a um grande grupo de indivíduos, enquanto as entrevistas são mais adequadas para amostras reduzidas; obtêm-se dados de uma forma relativamente rápida e com menores custos.

O questionário apresenta determinadas desvantagens, como qualquer outro instrumento de recolha de dados. Sousa (2009) indica diversas desvantagens, entre elas: ausência de respostas (na medida em que os sujeitos podem não responder a todas as perguntas) e aparecimento de problemas de objetividade (por exemplo, um item pode ser interpretado de diferentes modos por diferentes sujeitos).

Para minimizar tais aspetos, no processo de desenvolvimento do questionário seguiram-se indicações de Coutinho (2011), Sousa (2009) e Carmo e Ferreira (1998), conforme a seguir se descreve. Para que os alunos se sentissem motivados a dar resposta às questões do questionário foi-lhes explicado quais eram os objetivos do mesmo e a importância do mesmo para o estudo. No momento de aplicação do questionário, foi-lhes também solicitado que respondessem de acordo com o que pensavam e sentiam, pois o mais importante era serem sinceros nas respostas; no final do preenchimento do questionário, foi-lhes referido um agradecimento formal. Ainda, teve-se a preocupação de não apresentar aos alunos um questionário com muitas páginas, para evitar o possível imediato desinteresse por parte dos alunos.

Quanto à estrutura do questionário procurou-se que o mesmo tivesse uma apresentação gráfica apelativa, motivante e interessante, adequada ao público-alvo. As instruções de resposta foram claramente indicadas na introdução que precede cada uma das duas partes em que o questionário foi organizado. De referir que a estruturação do questionário teve por base o apresentado por Fartura (2007).

Os itens integrantes de cada parte foram organizados de modo a maximizar a cooperação dos alunos. Em relação, à redação dos itens teve-se em conta a clareza e o rigor dos mesmos, de forma a evitar ambiguidades.

As questões integradas na primeira parte do questionário tiveram como propósito conhecer as representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação de TI. Para elaborar as questões desta parte recorreu-se ao referencial de teórico (quadro 1) relativo à CM, usado na reformulação de TI selecionadas, a fim de potenciar o apelo a capacidades de CM. As questões integrantes na segunda parte do questionário tiveram como propósito conhecer a opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI, orientadas para o promover as suas capacidades de CM.

Os itens foram classificados segundo a Terminologia adotada na classificação de itens instrumentos de avaliação externa, elaborada pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE). Optou-se por esta terminologia pelo fato de ser a usada nos documentos produzidos pelo Gabinete de Avaliação Educacional.

Quanto ao tipo de itens, a primeira parte integra 5 itens de seleção (itens de escolha múltipla) e 2 itens de construção (1 item de resposta restrita e 1 item de resposta curta). A segunda parte integra 11 itens de seleção, concretamente, itens de escolha múltipla.

Sousa (2009) e Carmo e Ferreira (1998) consideram que um questionário deve ser alvo de uma aplicação-piloto, a fim de identificar e eliminar prováveis erros detetados pelos questionados, e de uma revisão por um investigador, com intuito de executar uma apreciação crítica, em relação, ao aspeto gráfico geral, à organização geral e à adequação de cada pergunta. Todavia, e devido a diversos contratempos, relacionados com limitação do tempo disponível para aplicação do questionário, não foi tido em conta estes cuidados. Porém até obter a versão final do questionário, foram concebidas diversas versões. Tais versões foram sujeitas a sucessivas reformulações, propostas pela orientadora deste estudo.

Este instrumento foi aplicado a todos os sujeitos do estudo, dois dias após a quinta sessão (última sessão), na qual foi implementada a TI – *À volta das tabuadas* – orientada para a promoção da CM.

3.5 Análise dos dados

A análise de conteúdo foi a técnica de tratamento de dados privilegiada no âmbito desta investigação, tendo em conta as finalidades, as questões de investigação e, em consequência, a orientação metodológica seguida.

De acordo com Bardin (1991) a *análise de conteúdo* pode resumir-se num

[...] conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.” (p. 42)

Deste modo, todas as respostas dos alunos das FTA (Apêndice B) e as intervenções dos alunos transcritas dos registos áudio (Apêndice G, apresentado a título de exemplo) foram sujeitas a uma análise de conteúdo, seguindo as orientações de Bardin (1991), Carmo e Ferreira (1998), Bogdan e Bicklen (1994), Sousa (2009) e Coutinho (2009). Assim, de acordo com os autores, uma análise de conteúdo envolve três etapas sequenciais: pré-análise, exploração do material e por fim, tratamento de dados.

Na etapa da pré-análise, organizou-se todo o material, possuidor de dados, em conformidade com o seu tipo (produções escritas dos alunos, que correspondem às respostas escritas dadas pelos mesmos às questões formuladas na FTA referente a cada TI realizada em cada sessão implementada em sala de aula e produções orais dos alunos, decorrente das transcrições das gravações áudio das sessões 2, 3 e 4). Fez-se, ainda, uma “leitura flutuante”, que segundo Bardin (1991) consiste num contacto com os documentos, procurando conhecer os seus conteúdos, aspetos organizativos e ideias principais.

Na segunda etapa, exploração do material, primeiramente, procedeu-se à identificação das unidades, no caso concreto deste estudo, foram os documentos. Posteriormente passou-se à definição das categorias, designadamente, capacidades específicas e transversais de CM, de acordo com o referencial teórico referente à CM (quadro 1) e das regras de quantificação, concretamente, presença (ou não) de capacidades de CM.

Uma vez estabelecidas as unidades, as categorias e as regras de quantificação, passou-se à última etapa da análise de conteúdo: tratamento dos dados. Nesta etapa, primeiramente, verificou-se a presença (ou não) de capacidades de CM nas produções orais dos alunos, nas sessões 2, 3 e 4, assim como nas produções escritas dos alunos

(Apêndices D e E), para cada uma das sessões e para cada aluno, resultando diversos quadros de registo. Posteriormente, construíram-se tabelas de frequência (frequência absoluta e relativa), que sintetizam as informações obtidas, relativas à mobilização de capacidades de CM dos alunos.

No que diz respeito aos dados obtidos no âmbito do questionário, aplicado após a implementação de todas as sessões, concretamente, os dados obtidos nos itens de escolha múltipla, procedeu-se a uma análise estatística. Os dados foram analisados e, posteriormente, organizados em tabelas de frequência (absoluta e relativa), com recurso ao software *Excel*.

Finalmente, os dados resultantes dos itens de resposta curta e restrita do questionário, concomitantemente com os dados obtidos a partir do diário de bordo foram importantes para evidenciar/complementar resultados deste estudo, tendo em conta as questões de investigação.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

No presente capítulo apresentam-se os resultados da investigação, encontrando-se organizado em três pontos. O primeiro diz respeito à apresentação dos resultados referentes à QI1 – Qual o contributo das TI, orientadas para a CM, na promoção de capacidades de CM dos alunos na vertente escrita (na primeira secção) e na vertente oral (na segunda secção). No segundo ponto são apresentados os resultados relativos à QI2 – Quais as representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação de TI? O terceiro ponto centra-se nos resultados tocantes à QI3 – Qual a opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI orientadas para o promover as suas capacidades de CM?

4.1 Contributo das tarefas de investigação orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM dos alunos

Este ponto está organizado em duas secções. Na primeira apresentam-se os resultados obtidos referentes ao contributo das TI orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM, na vertente escrita e, na segunda secção, na vertente oral.

4.1.1 Vertente escrita

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos referentes ao contributo das TI orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM, na vertente escrita, decorrente da análise das produções escritas dos alunos, que correspondem às respostas escritas dadas pelos mesmos às questões formuladas na FTA, de cada TI por si realizadas. É de recordar que as capacidades específicas consideradas na CM, na vertente escrita, foram: CE1 – *Expressar ideias, relações, regularidades identificadas*, CE2 – *Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos* e CE3 – *Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens*, assim como as capacidades de CM transversais: CT1 – *Utilizar uma linguagem matemática clara* e CT2 – *Utilizar uma linguagem matemática rigorosa*, de acordo com o referencial teórico (quadro 1).

Como referido no capítulo anterior, os dados do presente estudo foram recolhidos com o apoio de diversos instrumentos de recolha de dados. Os resultados obtidos relativos à vertente escrita foram sujeitos a uma análise, de acordo com o *Instrumento de análise das produções orais dos alunos no contexto das sessões 2, 3 e 4* (Apêndice D) e posteriormente foram organizados numa tabela, de forma a permitir uma visão global.

Assim, a tabela 5 apresenta a frequência absoluta e relativa (valores arredondados às unidades) de alunos que evidencia, nas produções escritas, a mobilização de capacidades de CM a que se apelava em cada item de cada FTA por sessão e, em simultâneo, no conjunto das sessões. É de realçar que na análise dos dados, exclusivamente, os itens não respondidos por todos os alunos não foram considerados neste estudo. Por tal algumas células surgem com as letras NR (Não Respondeu).

Tabela 1 - Mobilização de capacidades de CM pelos alunos por sessão: frequência absoluta e relativa

		FTA	Nº de alunos	Itens das fichas de trabalho	Capacidades de CM					
					CE1	CE2	CE3		CT1	CT2
							CE3.1	CE3.2		
Sessões	1	Vamos descobrir regularidades	24	1	24 (100%)				10 (42%)	6 (25%)
				2	10 (42%)	8 (33%)	19 (79%)		17 (71%)	7 (29%)
				3	5 (21%)		19 (79%)		13 (54%)	7 (29%)
				4	15 (63%)	8 (33%)			11 (46%)	5 (21%)
	2	Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel	23	1			23 (100%)		23 (100%)	23 (100%)
				2			23 (100%)		23 (100%)	6 (26%)
				3	23 (100%)	14 (61%)			23 (100%)	4 (17%)
				4	19 (83%)				19 (83%)	5 (22%)
				5			NR		NR	NR
				6			NR		NR	NR
				7	NR	NR			NR	NR
				8	NR				NR	NR
	3	Dª Luísa e as Escadas	24	1	14 (58%)	12 (50%)			14 (58%)	12 (50%)
				2	14 (58%)				14 (58%)	10 (42%)
				3				8 (33%)	8 (33%)	6 (25%)
				4			12 (50%)		12 (50%)	2 (8%)
				5	2 (8%)				2 (8%)	0
				6				NR	NR	NR
				7	NR				NR	NR
	4	Dobragens e um só corte	24	2	22 (92%)	18 (75%)			20 (83%)	14 (58%)
				3				24 (100%)	24 (100%)	24 (100%)
				4			24 (100%)		24 (100%)	10 (42%)
				5	24 (100%)	16 (67%)			24 (100%)	14 (58%)
				6			24 (100%)	24 (100%)	24 (100%)	14 (58%)
				7a	6 (25%)				6 (25%)	2 (8%)
				7b	4 (17%)				4 (17%)	2 (8%)
				7c			20 (83%)		20 (83%)	20 (83%)
				8			14 (58%)		14 (58%)	2 (8%)
	5	Á volta das tabuadas	22	1			21 (96%)		21 (96%)	21 (96%)
				2	16 (73%)				15 (68%)	8 (36%)
				3	7 (32%)		21 (96%)		19 (86%)	5 (23%)
				4		1 (5%)			1 (5%)	1 (5%)
				5	6 (27%)				6 (27%)	6 (27%)
				6	8 (36%)				8 (36%)	8 (36%)
				7	1 (5%)				1 (5%)	1 (5%)

Relembre-se que o propósito primordial da primeira sessão era efetuar uma caracterização dos alunos e na quinta sessão realizar uma avaliação dos mesmos, ao nível das capacidades de CM dos alunos. Focando a atenção na primeira e quinta sessões, verifica-se que a percentagem de alunos a mobilizar capacidades de CM específicas, na vertente escrita, não foi gradual. Com efeito, quanto às capacidades de CM específicas, na sessão 1, constata-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CE3.1 (utilizar representações e/ou combinar linguagens para organizar informações, dados, resultados), ainda que nos itens 2 e 3 a percentagem é menor que 50%. Por outro lado verifica-se uma menor percentagem de alunos a mobilizar a CE2 (justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos), em concreto 33% dos alunos. Por sua vez, na sessão 5, apesar de ter sido a última sessão realizada, no tocante à CE2 (justificar e/ou CE1 (expressar ideias, relações, regularidades identificadas), a percentagem de alunos que evidencia a mobilização de tal capacidade de CM é menor, em comparação com a sessão 1, em concreto, 5% dos alunos. Em relação à CE1, (explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos) a percentagem de alunos a mobilizar esta capacidade de CM específica é heterogénea, dependente das solicitações dos itens. Contudo, é de destacar a percentagem de alunos a mobilizar a CE3.1 (utilizar representações e/ou combinar linguagens para organizar informações, dados, resultados), designadamente, 96% dos alunos.

Tendo em conta uma leitura global da tabela, destacam-se os resultados obtidos na sessão 2 e na sessão 4 (no que concerne aos itens 2, 3, 5 e 6), uma vez que nestas sessões se verifica uma maior percentagem de alunos a mobilizar capacidades de CM específicas, em comparação com as outras sessões.

No que toca à sessão 2, a percentagem de alunos a mobilizar CE2 e CE3.1 é sempre superior, em comparação à primeira sessão (no tocante aos itens da FTA resolvidos por todos os sujeitos de estudo). É de destacar a percentagem total de alunos a mobilizar a CE3.1 (utilizar representações e/ou combinar linguagens para organizar informações, dados, resultados), nos itens 1 e 2.

No que diz respeito aos resultados obtidos na terceira sessão, o número de alunos a mobilizar capacidades de CM específicas, concretamente, CE1, CE2 e CE3.1, é sempre menor do que na segunda sessão. É de sublinhar que a CE3.2 (utilizar representações e/ou combinar linguagens para testar ideias, relações, regularidades) não havia sido apelada no âmbito das sessões implementadas anteriormente.

Na quarta sessão, como já referido, destaca-se os resultados obtidos referentes às capacidades de CM específicas, em concreto, CE1 nos itens 2 e 5, CE2 no item 2, CE3.1 nos itens 4, 6 e 7c e CE3.2 nos itens 3 e 6. Salienta-se que muitos alunos não responderam aos itens 7a e 7b.

A propósito dos resultados obtidos relativamente às capacidades de CM transversais, no total das sessões, verifica-se um maior (ou igual) número de alunos a mobilizar a CT1 (utilizar uma linguagem matemática clara) em comparação com a CT2 (utilizar uma linguagem matemática rigorosa). Igualmente, constata-se que na segunda e quarta sessões todos os alunos mobilizaram a CT1 em diversos itens. Todavia, o número de alunos a mobilizar a CT2 é díspar no decorrer das sessões.

De seguida, apresentam-se exemplos ilustrativos da mobilização de capacidades de CM conforme as produções escritas dos alunos, nas diferentes sessões. Numa primeira fase mostra-se exemplos relativos às capacidades de CM específicas e numa segunda fase exemplos referentes às capacidades de CM transversais. Recorde-se que cada uma das capacidades de CM específicas foi apelada em determinados itens das FTA, enquanto as capacidades de CM transversais foram apeladas em todos os itens das FTA.

Capacidades de CM específicas

Capacidade CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas

No que diz respeito à sessão 1, os alunos revelaram o uso da capacidade CE1, em resposta aos diferentes itens da FTA, concretamente, nos itens 1, 2, 3 e 4. Todavia, verifica-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CE1 em resposta ao item 1, designadamente, 100% dos alunos. A título de exemplo é a resposta dada por A13 ao item 3 (fig.7), da tarefa 1, intitulada *Vamos encontrar regularidades*.

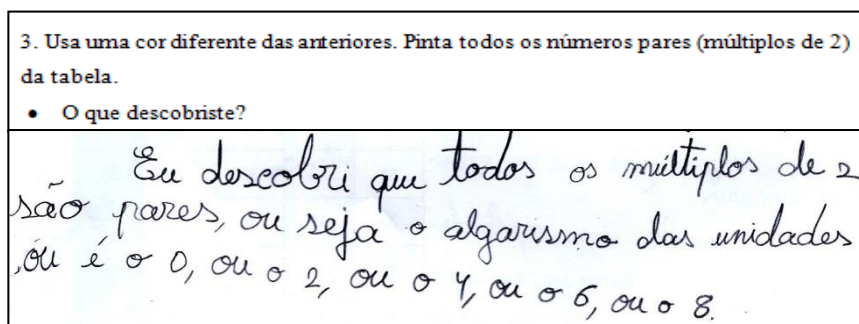


Figura 7 - Resposta de A13 ao item 3 da tarefa 1

Na sessão 2 é evidente a mobilização da capacidade CE1 por 100% dos alunos em reposta ao item 3 e 83% em resposta ao item 4 da FTA. Exemplos disso são as respostas dadas por A2 (fig. 8) e por A6 (fig. 9), ao item 4 da tarefa 2, intitulada *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*.

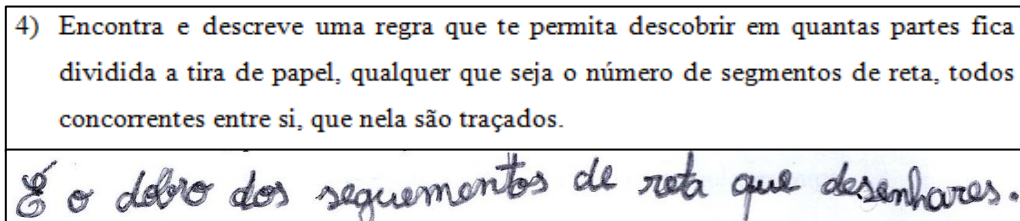


Figura 8 - Resposta de A2 ao item 4 da tarefa 2

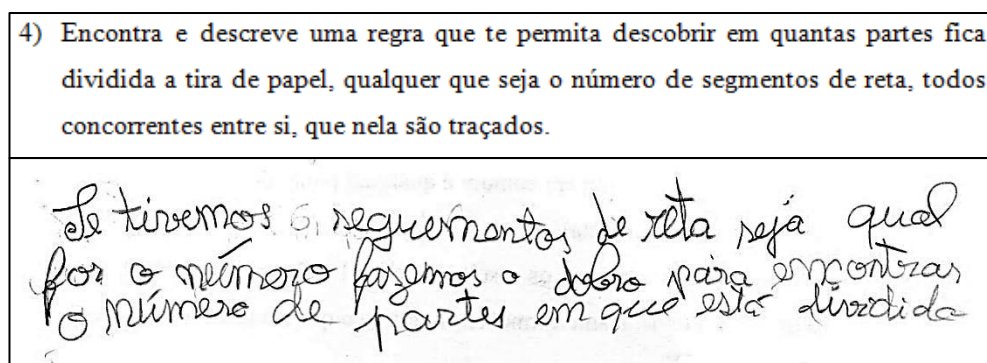


Figura 9 - Resposta de A6 ao item 4 da tarefa 2

Em relação à sessão 3, observa-se a mobilização da capacidade CE1 por 58% dos alunos em resposta aos itens 1 e 2 e 8% em resposta ao item 5. Exemplo disso é a resposta dada por A11 (fig. 10) ao item 1 da tarefa 3, intitulada *D^a Luísa e as Escadas*.

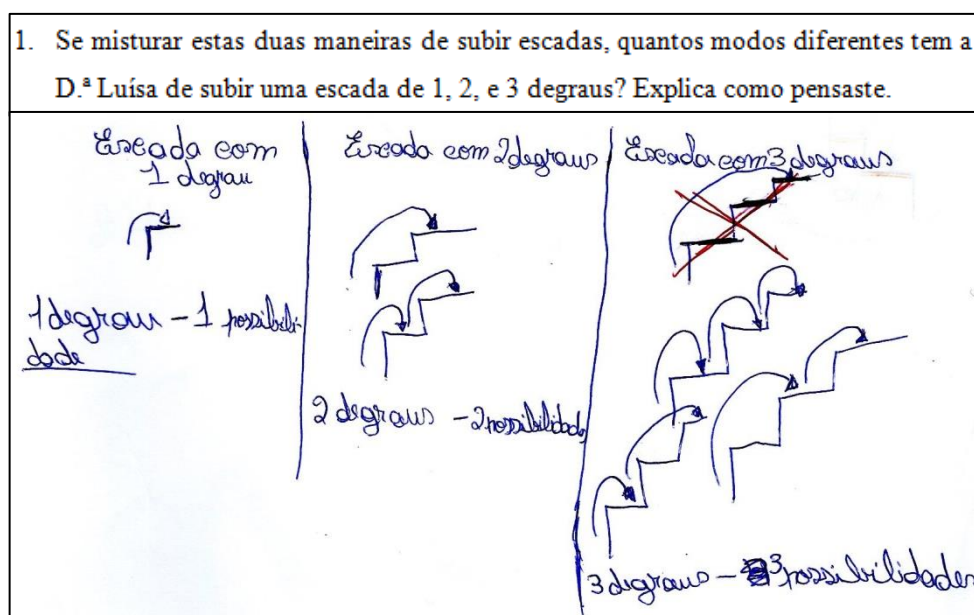
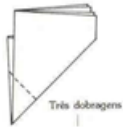


Figura 10 - Resposta de A11 ao item 1 da tarefa 3

Na quarta sessão os alunos revelaram o uso da capacidade de CE1 em diferentes itens da FTA, em concreto, em resposta aos itens 1, 5, 7a e 7b. Todavia, observa-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CE1 em resposta aos itens 2 (92% dos alunos) e 5 (100% dos alunos). Exemplo disso são as respostas de A7 ao item 2 (fig. 11) e a resposta de A10 ao item 7b (fig. 12), da tarefa 4, intitulada *Dobragens e um só corte*.

2. Sem executares, quantas figuras pensas que obténs com três dobragens e um corte numa folha de papel, como mostra a imagem. Explica, por palavras, como pensaste.



Pensamos que obtemos 2 figuras, porque em 2 dobragens obtemos 1 figura, logo em 3 dobragens obteríamos 2 figuras.

Figura 11 - Resposta de A7 ao item 2 da tarefa 4

b. Existe alguma relação entre o número de dobragens e o número total de lados considerando todas as figuras obtidas? Se sim, enuncia-a, por palavras tuas?

Sim, ^{existe} uma relação entre o número de figuras obtidas e o número total de lados, e essa relação é que os números de figuras obtidas vezes quatro dá o número de total de lados.

Figura 12 - Resposta de A10 ao item 7b da tarefa 4

Na quinta sessão, 73% dos alunos evidenciaram a mobilização da capacidade CE1, em resposta ao item 2 e menos de 40% dos alunos em resposta aos itens 3, 5, 6 e 7. A título de exemplo apresenta-se a resposta de A13 (fig. 13) ao item 2 e a resposta de A6 (fig. 14) ao item 3 da tarefa 5, intitulada *À volta das tabuadas*.

2. Que relação existe entre cada um dos números da segunda linha e o correspondente na primeira linha?

A relação que existe entre cada um dos números da segunda linha e o correspondente na primeira linha é que os números da segunda linha acabam sempre no mesmo número que os da primeira linha ou seja o algarismo das unidades é sempre igual.

Figura 13 - Resposta de A13 ao item 2 da tarefa 5

3. Faz o mesmo que nas questões 1 e 2 para outros três números.

A relação entre a 1ª ~~linha~~ e a segunda ^{linha} da 1ª tabela é de 20.

A relação entre a 1ª linha e a segunda linha da 2ª tabela é de 50.

A relação entre a 1ª linha e a segunda linha da 3ª linha é de 90.

Figura 14 - Resposta de A6 ao item 3 da tarefa 5

Capacidade CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos

No que diz respeito à primeira sessão, 33% dos alunos revelaram o uso da capacidade CE2 na resposta dada a dois itens da FTA, concretamente, itens 2 e 4. A título de exemplo apresenta-se a resposta de A23 ao item 4, com recurso a um esquema para justificar o seu raciocínio matemático (fig. 15).

4. Há números que ficaram pintados com três cores.
Quais são? Explica porquê?

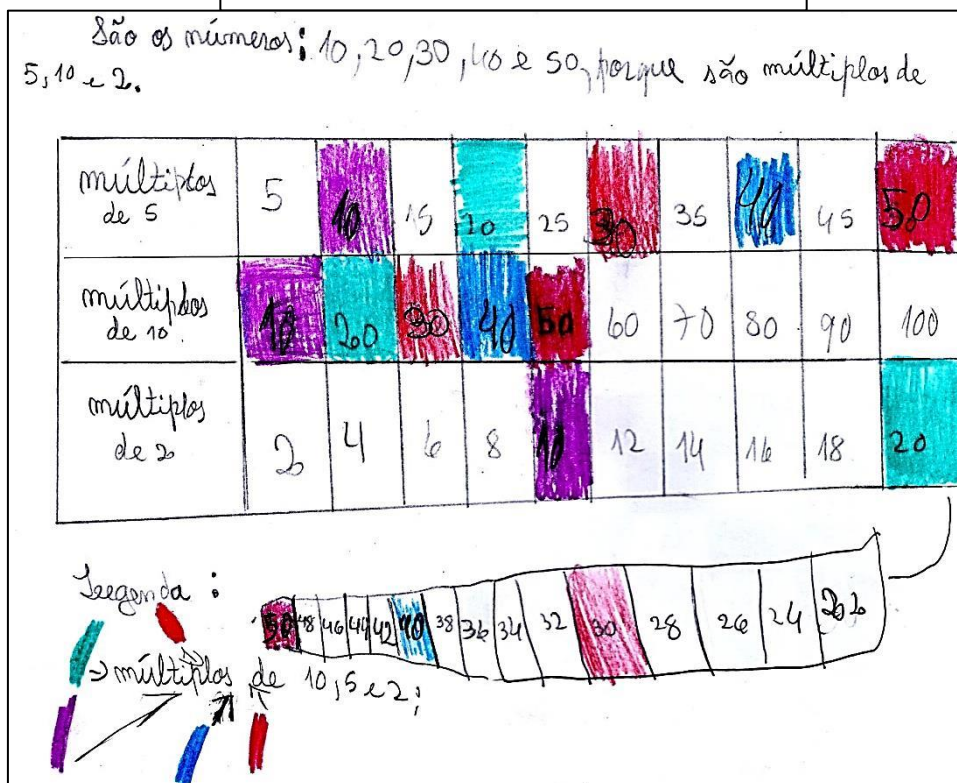


Figura 15 - Resposta de A23 ao item 4 da tarefa 1

Na sessão 2, 61% dos alunos revelou o uso da capacidade CE2 em resposta ao item 2. O exemplo que se segue é a justificação dada por A5 ao item 3 da tarefa 2 (fig. 16).

- 3) Tendo em atenção a tabela anterior, sem usar a estratégia do desenho, qual o número de partes em que pensas que fica dividida a tira de papel se nesta o Miguel traçar 8 segmentos de reta, concorrentes entre si. Explica, por palavras, como pensaste.

$$2 \times 8 = 16$$

com 8 segmentos de reta obtemos 16 partes, porque as partes são o dobro dos segmentos.

Figura 16 - Resposta de A5 ao item 3 da tarefa 2

Em relação à sessão 3, 50% dos alunos revelaram o uso da capacidade CE2 em resposta ao item 1. Tal pode verificar-se na resposta de A21 ao item 1 (fig. 17).

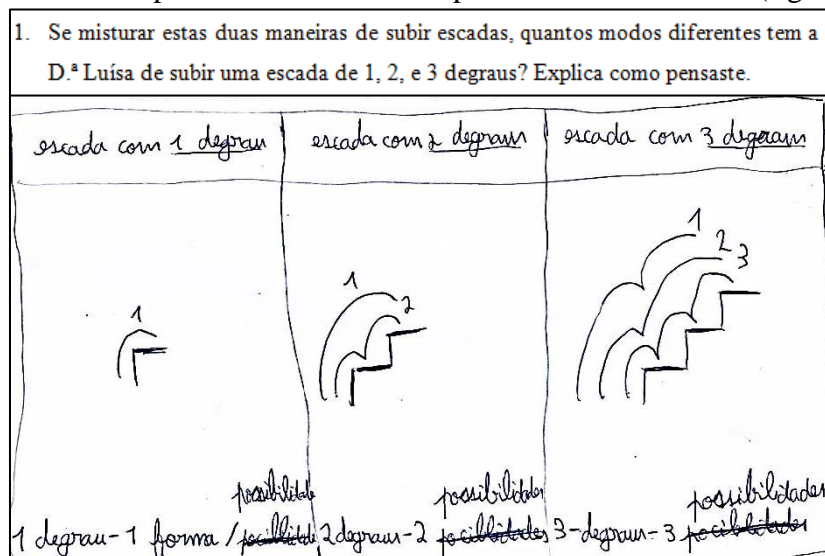


Figura 17 - Resposta de A21 ao item 1 da tarefa 3

Na quarta sessão identificou-se a mobilização da capacidade CE2, por parte de 75% dos alunos em resposta ao item 2 e 67% em resposta ao item 5. A título de exemplo inclui-se a resposta de A8 ao item 5 (fig. 18).

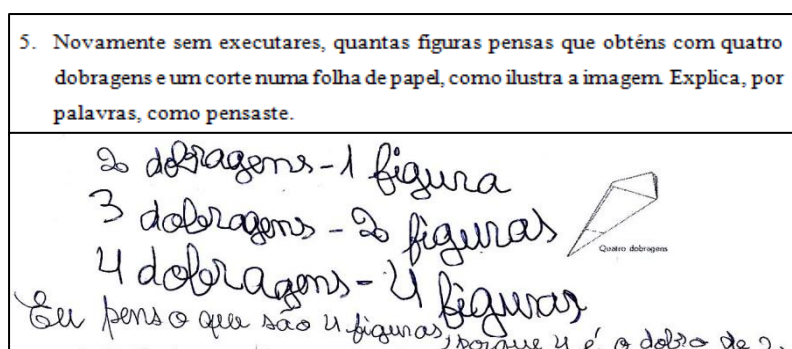


Figura 18 - Resposta de A8 ao item 5 da tarefa 4

Na quinta sessão a capacidade CE2 foi mobilizada, apenas, por uma aluna, em resposta ao item 4, conforme ilustra a figura que se segue (fig. 19).

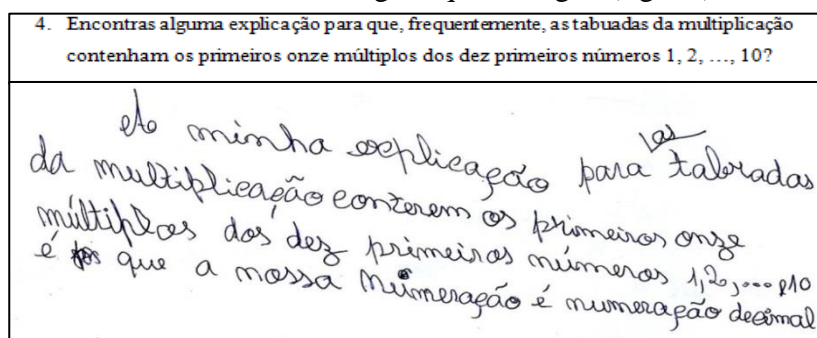


Figura 19 - Resposta de A23 ao item 4 da tarefa 5

CE3- Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens

Na sessão 1, 79% dos alunos na reposta aos itens 2 e 3 revelou o uso da capacidade CE3, concretamente, a CE3.1 – organizar informações, dados, resultados. A resposta dada por A12, referente aos itens 2 e 3 da tarefa 1, ilustra o referido (fig. 20).

<p>2. Usa lápis de cores diferentes e</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pinta da mesma cor todos os números que são múltiplos de 5, ou seja, começa no 5 e vai pintando todos os números de 5 em 5. • Pinta de cor diferente da usada em resposta anterior, todos os números que são múltiplos de 10, ou seja, começa no 10 e vai pintando todos os números de 10 em 10. 				
<p>3. Usa uma cor diferente das anteriores. Pinta todos os números pares (múltiplos de 2) da tabela.</p>				
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Figura 20 - Resposta de A12 ao item 2 e 3 da tarefa 1

No que concerne à sessão 2, 100% dos alunos revelou o uso da capacidade CE3.1, em resposta aos itens 1 e 2. Tal verifica-se na resposta dada por A24 (fig. 21) ao item 2 da tarefa 2.

2) Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na alínea 1.

Números de segmentos de reta	Números de partes em que está dividido
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
8	16

Figura 21 - Resposta de A24 ao item 2 da tarefa 2

Em relação à sessão 3, os alunos manifestaram o uso da capacidade CE3. No que diz respeito a CE3.1, 50% dos alunos mobilizaram esta capacidade de CM em resposta ao item 4 e 33% mobilizaram a CE3.2 em resposta ao item 3. É de referir que esta última capacidade de CM não havia sido apelada em sessões anteriores. Em relação à CE3.1 apresenta-se a resposta do A20 (fig. 22) e relativamente à capacidade CE3.2 inclui-se a resposta da A16 (fig. 23).

4. Constrói uma tabela e organiza todos os dados obtidos na resposta às questões anteriores.





escada com 1 degrau escada com		1 degrau - 1 forma / possibilidade
escada com 2 degraus		2 degraus - 2 formas / possibilidades
escada com 3 degraus		3 degraus - 3 formas / possibilidades
escada com 4 degraus		4 degraus - 4 formas / possibilidades

Figura 22 - Resposta de A20 ao item 4 da tarefa 3

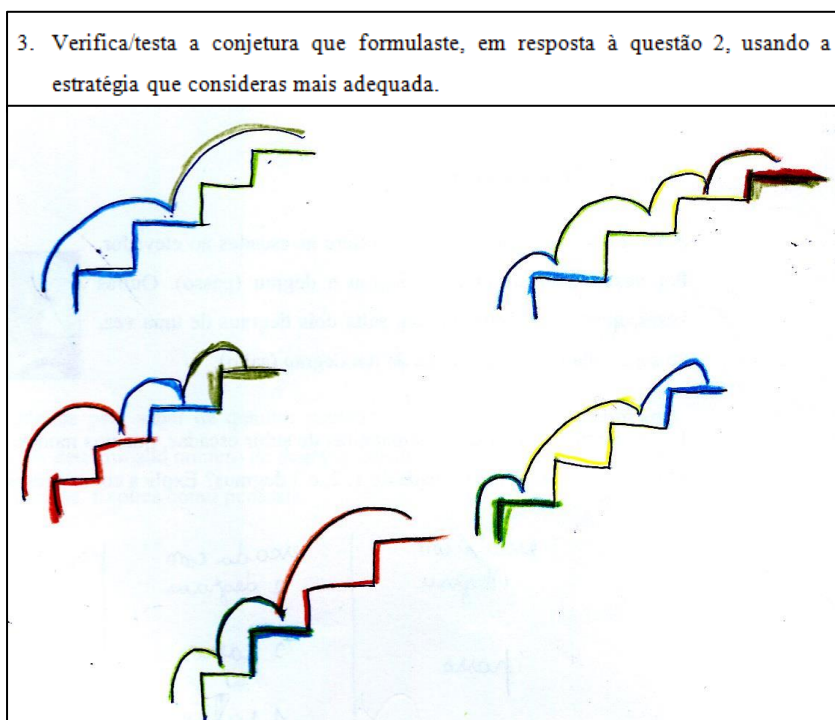


Figura 23 - Resposta de A16 ao item 3 da tarefa 3

Na quarta sessão, à semelhança do ocorrido na sessão 3, os alunos manifestaram o uso da capacidade CE3. Todos os alunos mobilizaram as capacidades CE3.1 e CE3.2, a que se apelava nos itens 3 e 6, respetivamente. A título de exemplo, no que concerne a CE3.1, apresenta-se a resposta de A18 (fig. 24) ao item 4 e relativamente à capacidade CE3.2 é ilustrada com a resposta de A21 ao item 6 (fig. 25).

4. Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na resposta às questões anteriores, de forma precisa e adequada.

resultados	obtidos
n.º de dobragens	n.º de figuras
2	1
3	2

Figura 24 - Resposta de A18 ao item 4 da tarefa 4

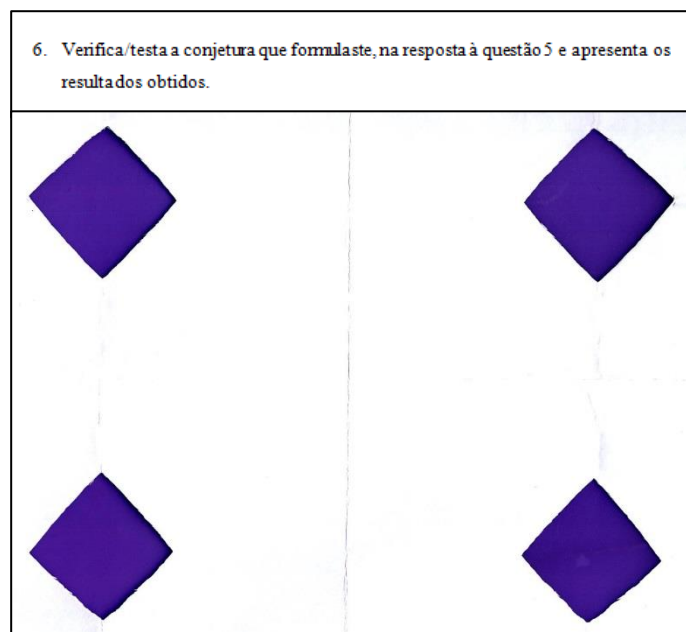


Figura 25 - Resposta de A21 ao item 6 da tarefa 4

Na última sessão, a quinta, à exceção de um aluno, todos evidenciaram a mobilização da capacidade CE3.1 em resposta aos itens 1 e 3. Exemplo disso são as respostas de A11 (fig. 26) ao item 1 e a resposta de A17 (fig. 27) ao item 3.

1. Obtém e regista na tabela, os primeiros 20 múltiplos de 7. Adiciona ao número zero (patente no visor), clicando a tecla com o sinal +, o número sete e depois usa a parcela 7 como “constante”, clicando, para tal sucessivamente 20 vezes na tecla do igual =, como ilustram as imagens.

0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
70	77	84	91	98	105	112	119	126	133

Figura 26 - Resposta de A11 ao item 1 da tarefa 5

3. Faz o mesmo que nas questões 1 e 2 para outros três números.

1. ^a	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
2. ^a	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81
	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
3. ^a	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152

Figura 27 - Resposta de A17 ao item 3 da tarefa 5

Capacidades de CM transversais

CT1 – Utilizar uma linguagem matemática clara

No que diz respeito à sessão 1, vários alunos revelaram o uso da capacidade CT1, em todos os itens da FTA. Porém, verifica-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT1 em resposta aos itens 2 e 3, 71% e 54%, respetivamente. A título de exemplo é a resposta dada por A11 ao item 4 (fig.28), da tarefa 1, intitulada *Vamos encontrar regularidades*.

4. Há números que ficaram pintados com três cores.
Quais são? Explica porquê?

Os números que ficaram pintados com 3 cores não são 10, 20, 30, 40 e 50, porque não múltiplos de 10, 5 e não múltiplos de 2.

múltiplos de 5

múltiplos de 10 e pares

Figura 28 - Resposta de A11 ao item 4 da tarefa 1

Na sessão 2 é evidente a mobilização da capacidade CT1, por 100% dos alunos em resposta aos itens 1, 2 e 3 e por 83% dos alunos em resposta ao item 4 da FTA (os restantes itens da FTA não foram resolvidos pelos alunos). Exemplo disso é a resposta dada por A13 ao item 4 (fig. 29), da tarefa 2, intitulada *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*.

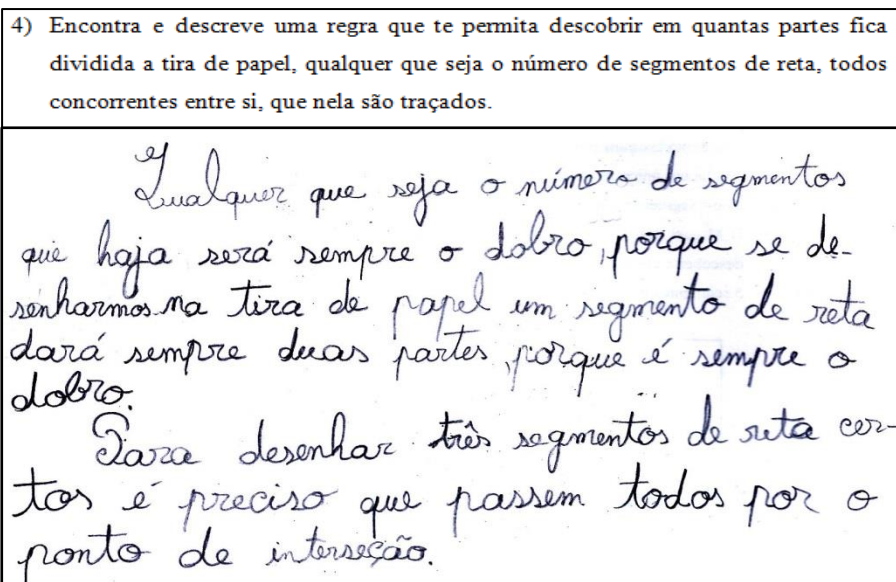


Figura 29 - Resposta de A13 ao item 4 da tarefa 2

Em relação à sessão 3 observa-se a mobilização da capacidade CT1 por alguns alunos, em resposta a todos itens da FTA. Contudo, constata-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT1 em resposta aos itens 1 e 2, designadamente, 58%. A resposta dada por A10 ao item 3 (fig. 30), da tarefa 3, intitulada *D^a Luísa e as Escadas* comprova a mobilização da capacidade de CM referida.

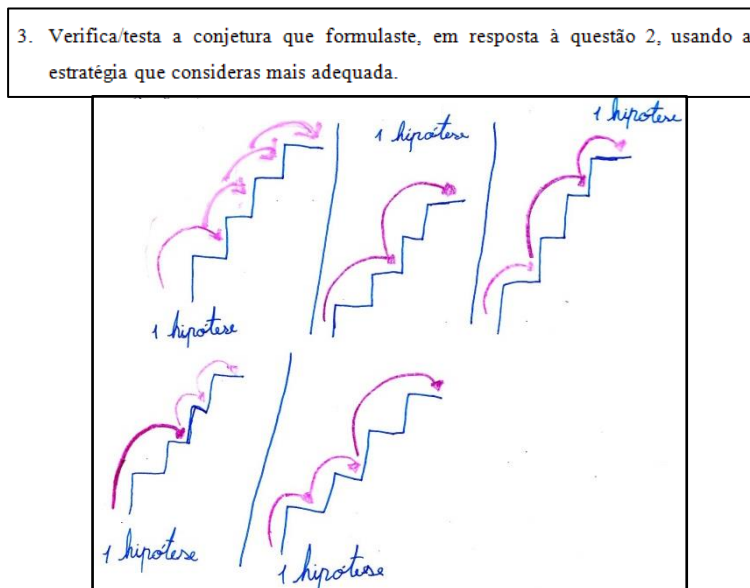


Figura 30 - Resposta de A10 ao item 3 da tarefa 3

Na quarta sessão os alunos revelaram o uso da capacidade de CT1 em resposta a todos os itens da FTA. Todavia, constata-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT1 em resposta aos itens 3, 4, 5 e 6, concretamente, 100% dos alunos. A título de exemplo é a resposta de A23 ao item 7a (fig. 31), da tarefa 4, intitulada *Dobragens e um só corte*.

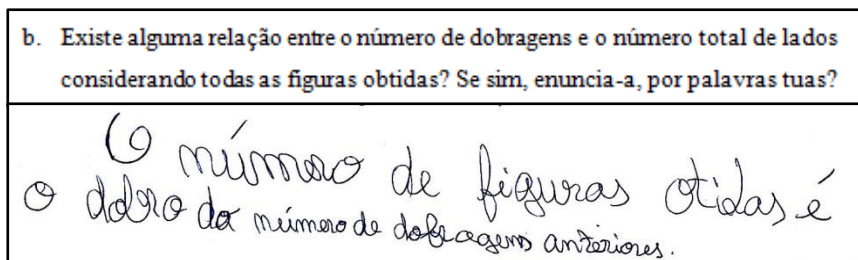


Figura 31 - Resposta de A23 ao item 7a da tarefa 4

Na quinta sessão os alunos evidenciaram a mobilização da capacidade CT1 em resposta a todos os itens da FTA. Porém, verifica-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT1 em resposta aos itens 1 (96%), 3 (86%) e 2 (68%). Tal verifica-se na resposta de A14 (fig. 32) ao item 6, da tarefa 5, intitulada *À volta das tabuadas*.

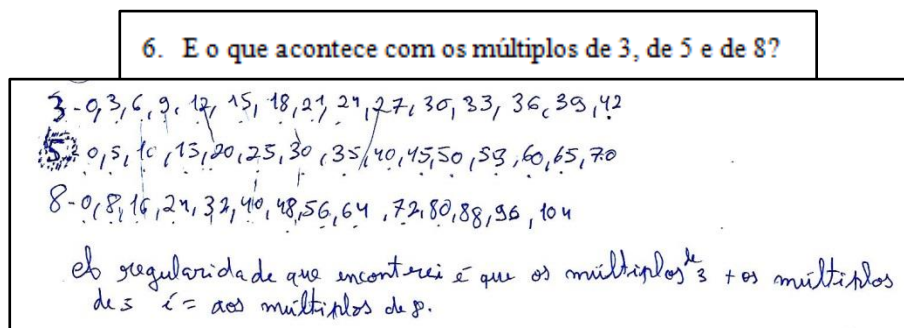


Figura 32 - Resposta de A14 ao item 6 da tarefa 5

CT2 – Utilizar uma linguagem matemática rigorosa

No que diz respeito à sessão 1, menos de 30% dos alunos revelaram o uso da capacidade CT2, em resposta aos diferentes itens da FTA. A título de exemplo é a resposta dada por A21 ao item 2 (fig. 33), da tarefa 1, intitulada *Vamos encontrar regularidades*.

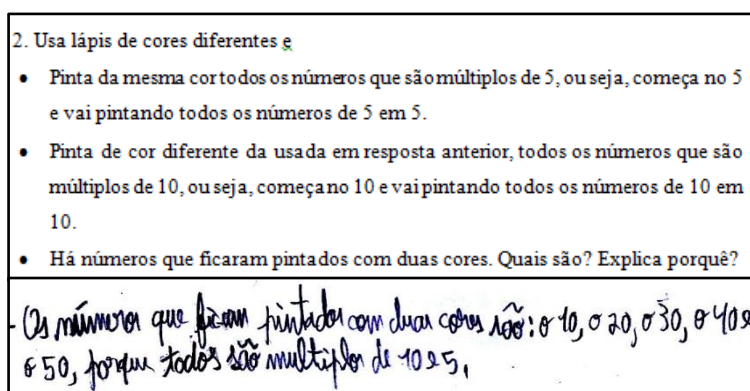


Figura 33 - Resposta de A21 ao item 2 da tarefa 1

Na sessão 2 é evidente a mobilização da capacidade CT2 pelos alunos. Contudo, verifica-se uma maior percentagem em resposta ao item 1, designadamente, 100% dos alunos. Nos restantes itens esta capacidade é mobilizada por menos de 30% dos alunos. Tal verifica-se na resposta dada por A12 (fig. 34) ao item 2, da tarefa 2, intitulada *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*.

2) Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na alínea 1.

Número de segmentos de retas	Número de partes em que está dividida
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16

Figura 34 - Resposta de A12 ao item 2 da tarefa 2

Em relação à sessão 3, observa-se a mobilização da capacidade CT2 por alguns alunos em resposta a todos os itens da FTA, exceto no item 5. No entanto constata-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT2 em resposta ao item 1, designadamente, 50% dos alunos. A resposta dada por A5 ao item 1 (fig. 35), da tarefa 3, intitulada *D^a Luísa e as Escadas*, ilustra a mobilização da capacidade de CM referida.

1. Se misturar estas duas maneiras de subir escadas, quantos modos diferentes tem a D.^a Luísa de subir uma escada de 1, 2, e 3 degraus? Explica como pensaste.



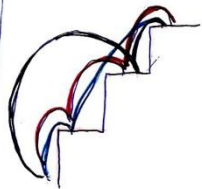
escada com 1 degrau	escada com 2 degraus	escada com 3 degraus
		
1- degrau - 1 forma	2 degraus - 2 formas	3 degraus - 3 formas

Figura 35 - Resposta de A5 ao item 1 da tarefa 3

Na quarta sessão os alunos revelaram o uso da capacidade de CT2 em resposta a todos os itens da FTA. Todavia, constata-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT2 em resposta ao item 3, concretamente, 100%. A título de exemplo é a resposta de A19 ao item 4 (fig. 36), da tarefa 4, intitulada *Dobragens e um só corte*.

4. Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na resposta às questões anteriores, de forma precisa e adequada.

Nº de dobragens	Nº de figuras geométricas
2	1
3	2

Figura 36 - Resposta de A19 ao item 4 da tarefa 4

Na quinta sessão os alunos evidenciaram a mobilização da capacidade CT2 em resposta a todos os itens da FTA. Porém, verifica-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar a CT1 em resposta ao item 1 (96% dos alunos). Nos restantes itens esta capacidade é mobilizada por menos de 40% dos alunos. Tal verifica-se na resposta de A12 (fig. 37) ao item 2, da tarefa 5, intitulada *À volta das tabuadas*.

2. Que relação existe entre cada um dos números da segunda linha e o correspondente na primeira linha?

A relação que existe entre cada um dos números da segunda linha e o correspondente na primeira linha é que o algarismo das unidades é igual.

Figura 37 - Resposta de A12 ao item 2 da tarefa 5

4.1.2 Vertente oral

Nesta secção apresentam-se os resultados relativos ao contributo das TI orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM, vertente oral, de acordo com o referencial teórico referente à CM (quadro 1), relativamente às diversas dimensões da CE4. Estes resultados decorrem da análise das produções orais, que correspondem às transcrições das gravações áudio das sessões (2, 3 e 4).

Na **Sessão 2** foi evidenciada a mobilização da capacidade CE4 – Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática. De seguida, apresentam-se exemplos ilustrativos, desta sessão, correspondentes às diferentes dimensões de CE4.

Em relação a CE4.1 – Apresentar e justificar a sua posição – foi mobilizada na sessão 2, conforme mostra o episódio seguinte, na sequência da resposta ao item 8 da TI *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*, proposta nesta sessão. Primeiramente, A6 apresenta a sua posição, posteriormente justifica-a.

AEI – O que foi que aconteceu A6 nos diferentes casos?

A6 – Do 2 para o 4 são + dois

AEI – No 1º caso & para o 2º caso?

A6 e vários alunos – Foi + 2

A6- Foi sempre mais 2 & porque do 2º caso para o 3º foi + 3 uhm & do 3º para o 4º foi mais 4 uhm & do 4º para o 5º foi + 5 uhm & do 5º para o 6º foi mais 6

(Em simultâneo, a Carolina explica e a AEI indica na tabela)

Quanto a CE4.2 – Compreender a posição de outrem – foi evidenciada na sessão 2, conforme mostra o episódio seguinte, no âmbito da resposta ao item 8 da TI *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*, proposta nesta sessão, atendendo que A10 compreende o raciocínio de A23 e aplica para outro caso.

AEI – Antes de verificarmos com 7 segmentos & talvez seja melhor verificar com 6.

Vários alunos – Sim...

AEI – Então & quantas partes obtemos com 6 segmentos de reta?

A12 – 22

AEI – Porquê?

A23 – Porque é mais 6

A10 – Então com 7 segmentos é mais 7 & e é igual a 29 & yes.

No que diz respeito a CE4.3 – Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático – foi evidenciada sessão 2, conforme ilustra o episódio seguinte, na sequência da resposta ao item 3 da TI *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*, proposta nesta sessão, pois A23 questiona o raciocínio de A21, considerando-o incorreto e posteriormente responde à sua própria questão de forma correta.

AEI – As partes são o dobro dos segmentos de reta? Para ser mais preciso & A21 tenta lá.

A21 – Os segmentos de reta ahm <

AEI – Os segmentos ou o número de segmentos?

A21 – O número de segmentos de reta é o dobro das partes

A23 – O quê?

AEI – Alguém quer ajudar o A21? & Todos concordam com o A21?

A23 – Não & as partes é que são o dobro dos segmentos.

Em relação à CE4.4 – Negociar significado – foi manifesta na sessão 2, conforme mostra o episódio seguinte, na sequência da resposta ao item 2 da TI *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*, proposta nesta sessão, quando os alunos, em conjunto com a AEI, negociaram os significados matemáticos a constar na tabela, em questão.

AEI – Agora em relação às duas variáveis. A21 & o que temos nesta coluna & será mesmo segmentos de reta?

A21 – Sim

AEI – Temos segmentos de reta? & Eu vejo aqui números.

A4 – Número de segmentos de reta.

AEI – Ah & assim está melhor. De facto não temos segmentos de reta & mas sim número de segmentos de reta

(A AEI altera na tabela representada no quadro)

AEI – Desta forma é mais preciso ou da outra forma?

Vários alunos – Desta... Número de segmentos de reta...

AEI – E quanto às partes. Temos mesmo partes?

A6 – Número de partes que está dividida ahm

AEI – Número de partes obtidas & fica mais preciso

(A AEI escreve no quadro)

A5 – Se fosse segmentos de reta & teríamos de fazer segmentos de reta e não números.

Na **Sessão 3** foi evidenciada a mobilização da capacidade de CM – CE4: Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática. De seguida, apresentam-se exemplos ilustrativos, desta sessão, correspondentes às diferentes dimensões de CE4.

Todavia a frequência de situações ocorridas nesta sessão foi mais reduzida, comparativamente à anterior, atendendo a que a duração do momento da apresentação e discussão do trabalho desenvolvido nesta sessão foi menor (30 minutos).

Em relação a CE4.1 – Apresentar e justificar a sua posição – foi manifesta na sessão 3, conforme ilustra o episódio seguinte, na sequência da resposta ao item 2 da TI *D^a Luísa e as Escadas*, proposta nesta sessão. A12 primeiramente apresenta a sua resposta (não ilustrada no episódio), em concreto, quatro formas e, seguidamente justifica a sua posição.

AEI – É a maioria. Aqui ao vocês optarem por um determinado número & devem ter uma justificação para tal & ou seja & se escolheram 4 & por exemplo & devem possuir uma razão para dar essa resposta. No caso do A12 & porque respondeste 4 formas?

A12 - Porque ali & se com 1 degrau era uma forma & uhm com 2 degraus era duas formas & uhm com 3 degraus era três formas & uhm ahm 4 degraus era 4 formas.

Quanto a CE4.2 – Compreender a posição de outrem – foi evidenciada na sessão 3, conforme mostra o episódio seguinte, no âmbito da resposta ao item 7 da TI *D^a Luísa e as Escadas*, proposta nesta sessão, visto que A21 compreende o raciocínio de A12 e aplica para outro caso proposto pela AEI.

AEI – Em relação & à última questão (A AEI lê o item 7). Imaginem que eu queria saber para 10 degraus & como é que eu faria?

A12 – Tínhamos de saber o número de possibilidades dos ahm dois números anteriores

AEI – Dos dois números anteriores. De quais & para o caso de 10 degraus?

A5 – Tínhamos ahm

A12 - 8 e 9

AEI – Exatamente & do número de possibilidades de subir a escada com 8 e 9 degraus.

A1 & se eu quisesse saber o número de formas de subir a escada com 15 degraus & como procederia?

A1 – ahm

A21 – Teria de saber primeiro o número de formas com 14 e 13 degraus

AEI – E depois o que fazias?

Vários alunos – Somamos...

No que diz respeito a CE4.3 – Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático – nenhum aluno evidenciou ter mobilizado a capacidade em questão, no âmbito da TI *D^a Luísa e as Escadas*, proposta nesta sessão.

Em relação a CE4.4 – Negociar significado – foi evidenciada na sessão 3, conforme mostra o episódio seguinte, na sequência da resposta ao item 6 da TI *D^a Luísa e as Escadas*, proposta nesta sessão, quando os alunos, em conjunto com a AEI, negociaram significados matemáticos referentes *ao número de modos diferentes de subir a escada com 6 degraus*.

A11 – Só que ali é o cinco & o 6 é o seguinte

AEI – Exatamente & muito bem A11. Então falta primeiro descobrir o número de formas com 5 degraus & para então descobrir o número de formas com 6 degraus. É isso?

A11 - Sim

A12 – Para o 6 é 13 & depois 21

AEI – Muito bem. Vamos então completar a tabela. Aqui para o caso 6?

A12 – 13 & eu tinha dito.

Na **Sessão 4** foi evidenciada a mobilização da capacidade de CM – CE4: Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática. De seguida, apresentam-se exemplos ilustrativos, desta sessão, correspondentes às diferentes dimensões de CE4. Porém, a frequência de situações ocorridas nesta sessão foi ainda mais reduzida, comparativamente à sessão anterior, atendendo a que a duração do momento em causa – apresentação e discussão do trabalho desenvolvido – foi de 20 minutos.

Em relação a CE4.1 – Apresentar e justificar a sua posição – foi identificada na sessão 4, conforme mostra o episódio seguinte, na sequência da resposta ao item 7a da TI *Dobragens e um só corte*, proposta nesta sessão. A11 primeiramente refere que o seu grupo obteve um resultado diferente aos explorados até ao momento, em concreto, cinco e dez e, posteriormente, justifica a sua posição, ainda que a mesma está incorreta.

AEI – Algum grupo obteve números diferentes nestes dois casos.

...

A11 – Nós

AEI – Onde?

A11 – Aí 5 & e em baixo 10

...

AEI - Explica como fizeram e como pensaram? & Por que razão obtiveram esses dois resultados & 5 e 10.

A11 – 1 mais 1 & dois uhm & 2 vezes 4 uhm 2 vezes 2 quatro uhm & 4 mais 1 cinco uhm & 5 vezes 2 dez.

AEI - Nesse vosso raciocínio não conseguimos encontrar uma regra < o objetivo é esse & encontrar uma regra a partir dos resultados obtidos.

Quanto a CE4.2 – Compreender a posição de outrem – foi evidenciada na sessão 4, conforme ilustra o episódio que se segue, no âmbito da resposta ao item 7a da TI *Dobragens e um só corte*, proposta nesta sessão, visto que A6 primeiramente expõe a sua posição, nomeadamente para o caso de 4 dobragens, depois A20 aplica a mesma regra, compreendendo a posição de A6, para responder para o caso de seis dobragens. Ainda, no final do episódio, identifica-se a mobilização de CE4.2 quando os alunos A1 e A6 referem qual é a regra geral, após escutarem as posições dos colegas acerca de dois casos concretos.

AEI - Então e no próximo caso?

A6 – 2 vezes 2 vezes uhm 2 vezes 2 uhm

(minutos depois)

AEI - Resumidamente & para descobrir o número de figuras obtidas para qualquer número de dobragens & como procedo A24? Por exemplo para 6 dobragens?

A24 - Fazemos uhm faço uhm ai uhm

AEI - Quem quer ajudar a A24? A20?

A20 – uhm 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2

A1 e A6 – Tem de ser sempre o número de dobragens.

AEI – Exatamente. Podemos verificar que desta forma & com esta regra & não é necessário recorrer ao processo de recorrência, como na situação explorada anteriormente.

No que diz respeito a CE4.3 – Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático – e a CE4.4 – Negociar significado, conforme o episódio seguinte identifica-se a mobilização de ambas as capacidades em questão, na sequência da resposta ao item 7a da TI *Dobragens e um só corte*, proposta nesta sessão. A primeira capacidade é manifesta quando A12 formula a questão *É 2 vezes 2 ahm vezes 2?* e posteriormente, a partir das questões da AEI, A12 responde à sua questão inicial. A CE4.4 é manifesta quando os alunos, em conjunto com a AEI negociaram significados matemáticos, concretamente, sobre duas conjeturas formuladas pelos alunos: A6 e A8.

AEI – Como procedo & se quiser saber o número de figuras obtidas de um determinado número de dobragens? Por exemplo com 3 dobragens? Vamos lá pensar outra forma & sem recorrer ao processo de recorrência.

(Os alunos não conseguiam chegar a nenhuma forma, posto isto a AEI forneceu ajuda)

AEI - Com duas dobragens é 2 vezes 2 < o 2 repete-se duas vezes < e o dois é número de dobragens.

Vários alunos – ahhh

A6 – É vezes 3

A12 – É 2 vezes 2 ahm vezes 2?

AEI - Vamos testar a conjectura do A12. 2 vezes 2?

A12 e vários alunos – 4...

AEI – 4 vezes 2?

A12 e vários alunos – 8...

A12 e vários alunos – É mesmo...

A12 – É verdadeira a minha conjectura.

AEI – Vamos testar para os outros casos, pois nunca podemos concluir uma regra com poucos casos.

A23 – ah já percebi < é sempre multiplicar o 2 & as vezes que do número de dobragens

AEI - Então e no próximo caso?

A6 – 2 vezes 2 vezes uhm 2 vezes 2 uhm

A8 – 4 vezes 2 & é a mesma coisa

AEI - Vamos verificar os dois casos para saber se é a mesma coisa. Primeira conjectura.

Dois vezes dois?

Vários alunos – 4...

AEI – 4 vezes dois

Vários alunos – 8...

AEI – 8 vezes 2

Alunos – 16...

AEI – Quanto à segunda conjectura < 4 vezes 2?

Vários alunos – 8...

AEI - Então o que podemos concluir?

Vários alunos - Não é a mesma coisa...

A23 – É diferente









Pode-se constatar que a CE4 – Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática – de acordo com as suas diferentes dimensões, foi evidenciada em todas as sessões, ainda que em determinadas sessões se verificou um maior número de situações de identificação da mobilização de CE4, concretamente, na sessão 1 (de salientar que foi a sessão com maior duração).

4.2 Representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito das tarefas de investigação realizadas

Neste ponto são apresentados os resultados referentes às representações dos alunos sobre o seu desempenho em relação ao uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação das TI. Os resultados apresentados, de seguida, são decorrentes da análise das respostas dadas pelos alunos às questões da primeira parte do questionário (Apêndice C), efetuado no final da implementação de todas as sessões.

Na tabela seguinte apresenta-se as representações dos alunos acerca do seu desempenho nas TI realizadas individualmente. Recorde-se que a primeira e última tarefas foram realizadas de modo individual. Os aspetos de desempenho considerados em ambas as tarefas foram iguais.

Tabela 2 - Representações dos alunos acerca do seu desempenho nas TI realizadas individualmente: frequência absoluta e relativa

<i>Aspetos de desempenho</i>	Tarefa 1				Tarefa 5			
	Vamos encontrar regularidades				À volta das tabuadas			
								
Fui capaz de exprimir o que penso	1 (4%)	2 (8%)	16 (67%)	5 (21%)	—	4 (17%)	16 (67%)	4 (17%)
Fui capaz de justificar o que penso	2 (8%)	4 (17%)	15 (63%)	3 (12%)	1 (4%)	7 (29%)	13 (54%)	3 (13%)
Fui capaz de usar linguagem matemática de forma adequada	1 (4%)	5 (21%)	17 (71%)	1 (4%)	1 (4%)	7 (29%)	15 (63%)	1 (4%)
Fui capaz de interpretar textos (nomeadamente o enunciado das tarefas)	2 (8%)	11 (46%)	10 (42%)	1 (4%)	1 (4%)	14 (59%)	8 (33%)	1 (4%)

Nota: Escala usada –  Discordo Totalmente  Discordo  Concordo  Concordo Totalmente

De acordo com tabela constata-se que em ambas as tarefas 67% dos alunos concordam que foram capazes de exprimir o que pensam. Na primeira tarefa 63% dos alunos concordam que foi capaz de justificar o que pensa e na sessão 5 a percentagem é menor, em concreto 54% dos alunos. Em relação ao terceiro aspeto de desempenho – usar uma linguagem de forma adequada – 71% dos alunos, na primeira tarefa, e 63% dos alunos, na quinta tarefa, dos alunos concordam que foram capazes. O último aspeto – interpretar textos – foi o que os alunos consideraram que evidenciaram mais dificuldades.

Na primeira sessão 46% dos alunos discorda que foi capaz de interpretar textos e na quinta sessão verifica-se um aumento para 59% dos alunos.

Quanto às representações dos alunos sobre o seu desempenho nas tarefas realizadas em grupo (segunda, terceira e quarta tarefas), os aspetos de desempenho considerados foram comuns aos das tarefas realizadas individualmente. Porém, estas tarefas foram complementadas com outros aspetos de desempenho relacionados com a dinâmica entre os elementos do grupo. O quadro que se segue mostra os resultados obtidos no âmbito das TI realizadas em grupo.

Tabela 3 - Representações dos alunos acerca do seu desempenho nas TI realizadas em grupo: frequência absoluta e relativa

<i>Aspetos de Desempenho</i>	Tarefa 2 Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel				Tarefa 3 D ^a Luísa e as Escadas				Tarefa 4 Dobragens e um só corte			
Fui capaz de respeitar a opinião dos meus colegas	1 (4%)	1 (4%)	7 (29%)	15 (63%)	1 (4%)	1 (4%)	6 (25%)	16 (67%)	1 (4%)	1 (4%)	5 (21%)	17 (71%)
Fui capaz de escutar a opinião dos meus colegas	—	1 (4%)	8 (33%)	15 (63%)	1 (4%)	—	10 (42%)	13 (54%)	1 (4%)	—	9 (38%)	14 (58%)
Fui capaz de justificar o que penso	—	10 (42%)	13 (54%)	1 (4%)	—	6 (25%)	14 (58%)	4 (17%)	—	5 (21%)	14 (58%)	5 (21%)
Fui capaz de fazer perguntas adequadas aos meus colegas para perceber como pensam	1 (4%)	7 (29%)	8 (33%)	8 (33%)	1 (4%)	4 (17%)	13 (54%)	6 (25%)	1 (4%)	2 (8%)	14 (58%)	7 (29%)
Fui capaz de dizer por palavras minhas o que os meus colegas pensam	—	5 (21%)	14 (58%)	5 (21%)	1 (4%)	3 (13%)	17 (71%)	3 (13%)	1 (4%)	5 (21%)	15 (63%)	3 (13%)
Fui capaz de interpretar tabelas	1 (4%)	7 (29%)	11 (46%)	5 (21%)	1 (4%)	4 (17%)	11 (46%)	8 (33%)	1 (4%)	6 (25%)	10 (42%)	7 (29%)
Fui capaz de usar linguagem matemática de forma adequada	2 (8%)	10 (42%)	11 (46%)	1 (4%)	3 (13%)	7 (29%)	14 (58%)	—	2 (8%)	7 (29%)	15 (63%)	—
Fui capaz de interpretar textos (nomeadamente o enunciado das tarefas)	1 (4%)	9 (38%)	11 (46%)	3 (13%)	1 (4%)	10 (42%)	10 (42%)	3 (13%)	2 (8%)	8 (33%)	11 (46%)	3 (13%)

Nota: Escala usada – Discreto Totalmente Discreto Concordo Concordo Totalmente





Decorrente da análise do quadro, verifica-se que nas três tarefas, pelo menos 63% dos alunos concorda totalmente que foi capaz de exprimir o que pensa nas três sessões (tarefa 2 – 63%; tarefa 3 – 67% e tarefa 4 – 71%). Ainda, a maioria dos alunos, em concreto, 63% dos alunos na segunda tarefa, 54% dos alunos na terceira tarefa e 63% dos alunos na quarta tarefa, concorda totalmente que foi capaz de escutar a opinião dos colegas. Na generalidade das três sessões aproximadamente 55 % dos alunos concorda que foi capaz de justificar o que pensa. A maioria dos alunos concorda que foi capaz de fazer perguntas adequadas aos colegas para perceber o que pensam, concretamente, 33% dos alunos na segunda sessão, 54% dos alunos na terceira sessão e 58% dos alunos na quarta sessão. Quanto ao aspeto “fui capaz de dizer por palavras minhas o que os meus colegas pensam” pelo menos 58% considera que foi capaz nas três sessões. Em todas as sessões mais de 40% dos alunos concorda que foi capaz de interpretar tabelas. Ao longo das três sessões verifica-se um aumento no número de alunos a concordar que foi capaz de usar uma linguagem matemática de forma adequada. Em relação ao último aspeto de desempenho, pelo menos 40% dos alunos concorda que foi capaz de interpretar textos.





4.3 Opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram tarefas de investigação orientadas para o promover as suas capacidades de CM

Neste ponto são apresentados os resultados obtidos relativamente à opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI, orientadas para o promover as suas capacidades de CM. Tais resultados são decorrentes da análise das respostas dadas às questões pelos alunos ao questionário (Apêndice C), efetuado no final da implementação de todas as sessões, dos registos efetuados no diário de bordo da AEI e da resposta dos alunos ao item 8 da FTA referente à sessão 4.

Na tabela que se segue apresentam-se os resultados obtidos referentes a um grupo de questões da segunda parte do questionário acerca da sua opinião sobre as aulas de matemática em que realizaram TI.

Tabela 4 - Opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI: frequência absoluta e relativa

						
Com a realização de TI, as aulas de matemática são	24 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	aborrecidas	do que as aulas de matemática em que não realizo TI
	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	24 (100%)	interessantes	
	0 (0%)	1 (4%)	9 (38%)	14 (58%)	motivantes	
	5 (21%)	15 (63%)	3 (12%)	1 (4%)	cansativas	
	0 (0%)	1 (4%)	4 (17%)	19 (79%)	produtivas (a nível do promover a aprendizagem matemática)	

Nota: Escala usada –  Muito Pouco;  Pouco;  Mais;  Muito Mais.

Todos os alunos consideram que as aulas de matemática em que realizaram TI, orientadas para o promover capacidades de CM, são *muito pouco* aborrecidas e *muito mais* interessantes. A maioria dos alunos (96%) considera que as aulas de matemática desta natureza são *muito mais* ou *mais* motivantes do que as aulas de matemática em que não realizaram TI. É de salientar que 20 de 24 alunos consideram as aulas que envolvem TI *pouco* ou *muito pouco* cansativas e 23 de 24 alunos consideram este tipo de aulas *mais* ou *muito mais* produtivas, comparativamente às restantes aulas em que não realizam TI.

Ainda, segundo a mesma afirmação – *Com a realização de TI, as aulas de matemática são... do que as aulas de matemática em que não realizo TI* – patente na tabela anterior, no último item deste grupo, os alunos tinham a oportunidade de caracterizar as aulas de investigação com uma palavra e depois atribuir uma “cara”. Todos os alunos escolheram um termo para caracterizar as aulas de matemática em que realizaram TI, orientadas para o promover as suas capacidades de CM, exceto 4 alunos. As respostas indicam que 16 alunos consideram as aulas *muito mais* “divertidas”, 2 alunos *muito mais* “espetaculares”, 1 aluno *muito mais* “engraçadas” e 1 aluno *muito mais* “sorridentes” do que as aulas de matemática em que não realizaram TI.

A sessão 4 (que envolveu a realização da TI – *Dobragens e um só corte* – orientada para a promoção de capacidades de CM) foi caracterizada por alguns alunos, como uma sessão divertida e interessante. Estes resultados surgem na sequência da resposta ao item 8 da FTA da sessão 4, de acordo com a seguinte solicitação *Imagina que os teus pais te questionam acerca do trabalho que realizaste, hoje, na escola, na área da matemática, o que lhes dirias? (sugestão: refere o que te foi proposto, como resolveste e pensaste...)*.

Outras opiniões dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI, orientadas para o promover as suas capacidades de CM, resultantes de registos do diário de bordo da AEI, referidas oralmente por alguns alunos, ao longo das sessões, foram:

- *Com estas tarefas eu aprendo muito mais matemática;*
- *Estas tarefas fazem “puxar” pela nossa cabeça e fazemos as tarefas com entusiasmo;*
- *Adoro fazer este tipo de tarefas, porque faço descobertas como os matemáticos.*

Ainda foram obtidos resultados, no âmbito de uma questão integrante na primeira parte do questionário, relativa à preferência do modo de trabalho nas aulas em que envolvem TI, nos quais decorrem que 2 alunos consideram que gostaram mais de efetuar TI individualmente, enquanto os restantes afirmam que gostaram de efetuar este tipo de tarefas em grupo.

As duas razões apontadas pelos alunos que optaram pelo modo de trabalho individual foram:

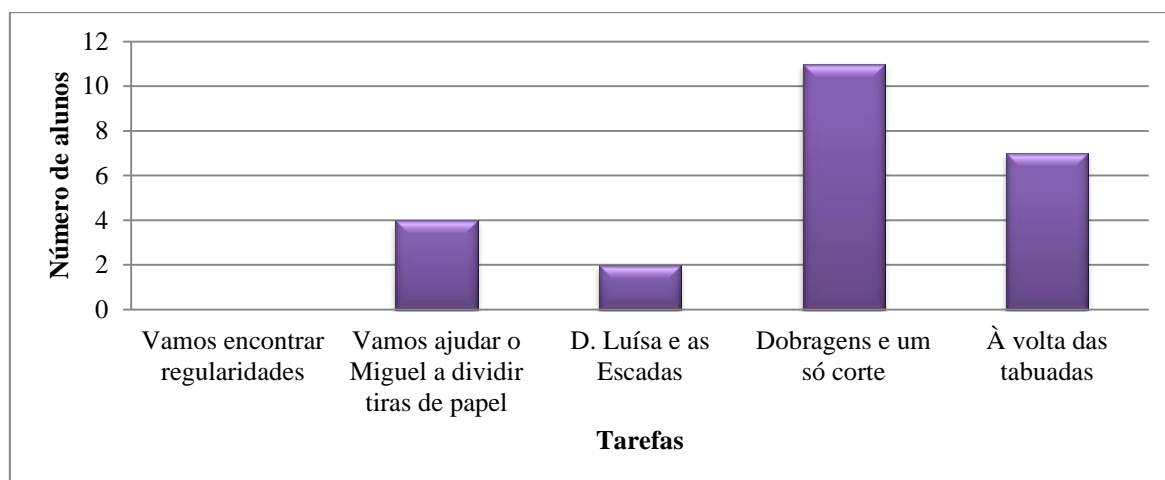
- *Ninguém me aborrece a fazer os cálculos;*
- *Em grupo eu não pensava nada e individual sim.*

Por sua vez, algumas das razões indicadas pelos alunos que optaram pelo modo de trabalho em grupo foram:

- *Não é só uma cabeça a pensar, mas sim várias;*
- *Mais ideias, e individualmente, podemos não ter ideias;*
- *Ouvimos sugestões dos colegas do grupo;*
- *Temos mais raciocínio;*
- *Porque há discussão e depois chegamos a uma conclusão;*
- *Ajudamos os outros e partilho o meu trabalho com os meus colegas;*
- *Aprendemos uns com os outros;*
- *Percebemos melhor quando temos alguma dificuldade.*

Os resultados, que se seguem, decorrem da análise das repostas dadas a uma questão, integrada na primeira parte do questionário, na qual se pretendia saber em qual das TI os alunos consideraram ter havido uma maior evolução na sua aprendizagem matemática.





Gráfico 4 - Opinião dos alunos acerca da TI em que consideraram ter havido uma maior evolução na sua aprendizagem matemática







Conforme o gráfico 4, verifica-se que a resposta dos alunos não foi unânime. É de salientar, que a tarefa com maior número de respostas, concretamente, 11 alunos (aproximadamente 46% dos alunos), foi a quarta – *Dobragens e um só corte* – e nenhum aluno escolheu a primeira tarefa – *Vamos encontrar regularidades*.

Na tabela que se segue, verifica-se os resultados obtidos na sequência de questões integrantes na segunda parte do questionário, relativos ao seu desempenho global durante as aulas que envolveram TI.

Tabela 5 - Opinião dos alunos sobre o seu desempenho global nas aulas de matemática em que realizaram TI: frequência absoluta e relativa

						
Nas aulas de matemática em que eu realizei TI	fui	0 (0%)	6 (25%)	15 (62%)	3 (13%)	participativo
	estive	0 (0%)	3 (13%)	14 (58%)	7 (29%)	atento
	desejei ir	0 (0%)	2 (8%)	10 (42%)	12 (50%)	vezes ao quadro apresentar a resolução das tarefas
	senti-me	0 (0%)	1 (4%)	16 (67%)	7 (29%)	motivado
	compreendi	0 (0%)	4 (16%)	11 (46%)	9 (38%)	os assuntos matemáticos explorados

Nota: Escala usada –  Muito Pouco;  Pouco  Mais;  Muito Mais

De acordo com tabela constata-se que 18 alunos consideram que foram *mais* ou *muito mais* participativos comparativamente às aulas habituais. Ainda, 21 alunos consideram que estiveram *mais* ou *muito mais* atentos. A maioria dos alunos (22 de 24) desejou ir *mais* ou *muito mais* vezes ao quadro apresentar a resolução das tarefas. Apenas 1 aluno se sentiu *pouco* ou *muito pouco* motivado no âmbito das aulas em que realizaram TI. Por fim, maioria dos alunos (20 de 24) considera que nas aulas em que envolveram TI compreendem *mais* ou *muito mais* os assuntos matemáticos explorados.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste sexto capítulo constam quatro pontos. No primeiro apresentam-se as principais conclusões em função das questões de investigação. No segundo ponto incluem-se as limitações da investigação. No terceiro ponto sugerem-se algumas investigações consideradas relevantes e decorrentes do estudo desenvolvido. No último ponto indicam-se considerações finais, resultantes do trabalho desenvolvido preconizado no ciclo de I-A.

5.1 Conclusões do estudo

Com a realização deste estudo pretendeu-se dar resposta a três questões de investigação. A primeira questão refere-se ao contributo das TI, orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM dos alunos, na vertente escrita e na vertente oral. Tendo em conta os resultados obtidos, conclui-se que as TI implementadas, orientadas para a CM, contribuem para a promoção de capacidades de CM dos alunos, na vertente escrita e na vertente oral.

Focando a atenção na vertente escrita, no que diz respeito às capacidades de CM específicas, de acordo com o referencial teórico usado (quadro 1), os resultados obtidos evidenciam que os alunos mobilizaram as capacidades a que se apelou: *Expressar ideias, relações, regularidades identificadas* (CE1), *Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos* (CE2), *Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens para organizar informações, dados, resultados* (CE3.1) e *Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens para testar ideias, relações, regularidades* (CE3.2). É de salientar que a frequência de mobilização das capacidades de CM apeladas foi distinta no decorrer das sessões e, em particular, nos itens de cada tarefa.

Um dos propósitos do presente estudo era efetuar uma caracterização inicial dos alunos na primeira sessão e realizar uma avaliação aos alunos na quinta sessão (última sessão), de modo a averiguar a sua evolução, ao nível da mobilização de capacidades de CM, na vertente escrita. Tendo em conta os resultados obtidos, pode-se constatar que não se verificou uma evolução gradual, no que toca ao número de alunos a mobilizar capacidades de CM específicas e transversais, ao longo das sessões. No entanto, verifica-se uma maior percentagem de alunos a mobilizar capacidades de CM na segunda e quarta sessões. Posto isto, as conclusões, que se seguem, estão apresentadas de acordo com as capacidades de CM, em função da frequência de alunos a mobilizar capacidades de CM, ao longo das sessões.

Assim, a propósito da capacidade *Expressar ideias, relações, regularidades identificadas* (CE1), os resultados obtidos sugerem que houve uma maior percentagem de alunos a mobilizar esta capacidade de CM na primeira sessão (100% dos alunos em resposta ao item 1), na quarta sessão (100% dos alunos em resposta ao item 5 e 92% em resposta ao item 2) e na segunda sessão (100% dos alunos em resposta ao item 3 e 83% em resposta ao item 4).

Em relação à capacidade *Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos* (CE2), constata-se que as sessões em que uma maior percentagem de alunos evidenciou mobilizar esta capacidade de CM foi na quarta sessão (75% dos alunos em resposta ao item 2 e 67% em resposta ao item 5) e na segunda sessão (61% dos alunos em resposta ao item 3). Na última sessão, apenas 5% dos alunos evidenciou o uso desta capacidade em resposta ao item 1. É de realçar que a CE2 foi a única capacidade de CM a não ser mobilizada pela totalidade dos alunos.

Quanto à capacidade *Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens para organizar informações, dados, resultados* (CE3.1), constata-se que esta foi mobilizada por um maior número de alunos na segunda sessão (100% dos alunos em resposta aos itens 1 e 2), na quarta sessão (100% dos alunos em resposta aos itens 4 e 6) e na última sessão (96% dos alunos em resposta aos itens 1 e 3). Ainda, é de sublinhar que pelo menos 50% dos alunos evidenciaram, sempre, o uso da capacidade CE3.1 ao longo de todas as sessões (83% dos alunos em resposta ao item 7c na quarta sessão, 79% em resposta aos itens 2 e 3 na primeira sessão, 58% em resposta ao item 8 na quarta sessão e 50% em resposta ao item 4 na terceira sessão).

No que diz respeito à capacidade de CM *Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens para testar ideias, relações, regularidades* (CE3.2), destaca-se que a mesma foi promovida em duas sessões, verificando-se um aumento na percentagem de alunos a mobilizar a capacidade CE3.2, da terceira sessão (33% dos alunos em resposta ao item 3) para a quarta sessão (100% dos alunos em resposta aos itens 3 e 6).

Tendo em conta as cinco sessões e no seguimento dos resultados obtidos, conclui-se que houve um maior número de alunos a mobilizar capacidades de CM específicas, no âmbito da vertente escrita, na segunda sessão. Por outras palavras, constata-se que 100% dos alunos evidenciou o uso da CE1 em resposta ao item 3 e 83% dos alunos em resposta ao item 4; 61% dos alunos evidenciou o uso da capacidade CE2 em resposta ao item 3 e 100% dos alunos evidenciou o uso da capacidade CE3.1 em resposta aos itens 1, 2, 3.

Quanto às capacidades de CM transversais, verifica-se um maior número de alunos a mobilizar a capacidade *Utiliza uma linguagem matemática clara* (CT1) comparativamente à capacidade *Utiliza uma linguagem matemática rigorosa* (CT2), ao longo das cinco sessões. Tendo em conta as duas capacidades transversais de CM verifica-se uma maior mobilização na segunda sessão da capacidade CT1 e na quarta sessão da capacidade CT2 (exceto nos itens 7a, 7b e 8, porém é de salientar que muitos alunos, nestes itens, não responderam ou responderam de forma incorreta).

Em relação à CM, na vertente oral, os resultados obtidos sugerem que no âmbito da implementação das TI, orientadas para a CM, foi mobilizada a capacidade de CM promovida nesta investigação, *Interagir com o outro numa situação que envolva informação* (CE4), em três sessões (2, 3 e 4). De realçar que não se verificou o uso da capacidade CE4 por todos os alunos, pois não tiveram oportunidade de mobilizar esta capacidade durante as sessões, uma vez que nem todos os alunos intervieram no momento *apresentação e discussão do trabalho desenvolvido* com frequência e nas oportunidades em que os alunos usufruíam para mobilizar a CE4 não foram capazes de tal.

Focando a atenção em cada capacidade integrante da capacidade de CE4 *Apresentar e justificar a sua posição* (CE4.1), *Compreender a posição de outrem* (CE4.2), *Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático* (CE4.3) e *Negociar significado* (CE4.4), a frequência de situações de mobilização destas capacidades foi decrescente da segunda para a quarta sessão. Uma das possíveis razões explicativas prende-se com a duração das sessões, concretamente, a duração do momento *apresentação e discussão do trabalho desenvolvido* foi menor de sessão para sessão. Durante as três (segunda, terceira e quarta) sessões, registou-se uma maior frequência no uso da CE4.1 e uma menor frequência no uso da CE4.3.

Com este estudo, pretendeu-se, ainda, dar resposta a outra questão, sendo ela “Quais as representações dos alunos sobre o seu desempenho ao nível do uso de capacidades de CM, no âmbito da implementação de TI?” De um modo geral, constata-se que a maioria dos alunos afirma ter sido capaz de usar as capacidades de CM apeladas, tanto no âmbito da implementação das TI realizadas de forma individual, como das TI realizadas em grupo. Contudo, alguns alunos reconhecem dificuldades no uso de capacidades de CM. No âmbito das duas TI realizadas no modo de trabalho individual, os resultados obtidos mostram que a maioria dos alunos concorda que foi capaz de (i) exprimir e justificar o que pensa e (ii) usar uma linguagem matemática de forma adequada. E ainda, a maioria dos alunos discorda que foi capaz de interpretar textos. No âmbito das três tarefas

realizadas em grupo, a maioria dos alunos concorda totalmente que foi capaz de respeitar e escutar a opinião dos colegas. Assim como verifica-se que maioria dos alunos concorda que foi capaz de (i) justificar o que pensa; (ii) fazer perguntas adequadas aos colegas; (iii) dizer por palavras o que os colegas pensam; (iv) interpretar tabelas e textos e (vi) usar uma linguagem matemática de forma adequada. Deste modo, constata-se que a maioria dos alunos considera que foi capaz de usar as capacidades de CM consideradas, no âmbito da implementação das TI realizadas (de forma individual e em grupo).

Uma última questão a que se pretendeu dar resposta neste estudo foi “Qual a opinião dos alunos sobre as aulas de matemática em que realizaram TI orientadas para o promover as suas capacidades de CM?” A resposta a esta questão está organizada segundo quatro aspetos. O primeiro diz respeito à opinião dos alunos sobre as aulas em que realizaram TI em comparação com as aulas habituais de matemática (cujo foco não se prendeu com a realização de TI). Decorrente dos resultados obtidos, conclui-se que todos os alunos consideram as aulas, em questão, muito pouco aborrecidas e muito mais interessantes do que as aulas em que não envolveram TI. A maioria dos alunos considera que as aulas de matemática em que realizaram TI foram muito mais motivantes, pouco cansativas e muito mais produtivas do que as aulas habituais de matemática.

Outro aspeto analisado prende-se com a opinião dos alunos acerca do modo de trabalho preferido no âmbito das aulas em que realizaram TI. A maioria dos alunos (22 em 24) afirma preferir o modo de trabalho em grupo ao invés do modo de trabalho individual.

O terceiro aspeto relaciona-se com a opinião dos alunos acerca da tarefa em verificaram uma maior evolução na aprendizagem matemática. Tendo em conta as cinco sessões, a maioria dos alunos considera que houve uma maior evolução da sua aprendizagem matemática na quarta sessão, caracterizada pela tarefa *Dobragens e um só corte*.

O último aspeto diz respeito às representações dos alunos sobre o seu desempenho global no âmbito das aulas de matemática em que realizaram TI. A maioria dos alunos considera que (i) foi mais participativo; (ii) esteve mais atento; (iii) desejou ir muito mais vezes ao quadro apresentar a resolução das tarefas; (iv) sentiu-se mais motivado e (v) compreendeu melhor os assuntos matemáticos explorados. De acordo com a opinião dos alunos, pode-se concluir que as aulas que envolvem TI orientadas para a promoção de capacidades de CM são apreciadas pelos mesmos, na medida em que fomentam uma maior participação, interesse e motivação destes.

5.2 Limitações da investigação

Neste ponto são enunciadas algumas limitações do estudo desenvolvido. Uma dessas limitações está relacionada com a impossibilidade da concretização de (pelo menos mais) um novo ciclo, dado que é uma das singularidades da investigação-ação, após a efetivação deste ciclo, condicionada pela articulação e duração da PPS B2, consequentemente com especificidades e exigências inerentes ao contexto em que decorreu o estudo.

Também o facto do contacto com a turma não ser sistemático e pontual (5 momentos espaçados) poderá ser considerado uma limitação, uma vez que não possibilitou uma exploração contínua de TI orientadas para a promoção de CM dos alunos.

Para finalizar, em relação ao questionário aplicado aos alunos, é de referir outra limitação, relacionada com a não testagem do mesmo, previamente à sua administração, por razões que se prendem com a gestão da planificação do trabalho da AEI.

5.3 Sugestões para futuras investigações

Ao longo das diversas etapas do estudo, surgiram algumas questões pertinentes que se afiguram como potenciais questões para futuras investigações.

Uma investigação a realizar prende-se com o desenvolver capacidades de CM, tendo como referência o quadro concetual usado neste estudo, no âmbito da implementação de outras tarefas matemáticas, entre elas, explorações, problemas e projetos.

No que diz respeito, exclusivamente, às TI, estas merecem estudos aprofundados e focalizados exclusivamente neste tipo de tarefas, com alunos do 1º CEB. A este nível, algumas das possíveis questões que surgem como ponto de partida para futuros estudos são: Em que processos matemáticos, particulares das TI, os alunos evidenciam mais dificuldades? Os alunos sentem-se mais motivados para a realização de TI do que para a realização de outro tipo de tarefas matemáticas? No contexto do 1º CEB qual é a frequência da realização de TI?

Surge também deste estudo, a possibilidade de realizar investigações envolvendo alunos de outros anos de escolaridade do 1º CEB, dado que os estudos existentes no âmbito deste tema são reduzidos, nomeadamente, com alunos deste ciclo.

5.4 Considerações finais

Tal como referido no capítulo 3, este estudo assume uma perspetiva *orientada para a prática*, segundo o plano de I-A. Um aspeto singular da I-A é a reflexão. Assim, após a realização do presente estudo, considerou-se relevante destacar alguns aspetos passíveis de reformulação, que surgiram no seguimento da realização deste estudo, os quais podem, globalmente, maximizar as potencialidades das TI, orientadas para a CM, na promoção de CM dos alunos no âmbito das aulas de matemática.

A partir deste estudo conclui-se que a implementação de TI, orientadas para a CM, é uma prática letiva profícua no ensino da matemática. Todavia dada a complexidade da natureza das TI e a necessidade de cumprir o estipulado pelo PMEB (Ponte *et al.*, 2007a), torna-se um processo exigente de articular e integrar em contexto sala de aula. As TI requerem tempo para a sua implementação, por vezes um intervalo de tempo mais elevado do que o previsto. No presente estudo, decorrente de especificidades do contexto em que o mesmo foi desenvolvido, não foi possível prolongar a duração das sessões em que se implementaram TI. Desta forma, considerou-se que era importante que os alunos tivessem tido mais tempo para a resolução das TI (nas sessões 2 e 3 nenhum grupo conseguiu concluir todos os itens das TI), já que neste tipo de tarefas matemáticas deve ser facultado aos alunos “tempo” para explorar as suas ideias, colocar questões, entre outros processos (Ponte *et al.*, 2006). É de destacar que se fossem acautelados outros aspetos, tais como, diminuição do número de itens da tarefa e/ou grau de complexidade das tarefas, possivelmente, o tempo disponível para a resolução da TI teria sido suficiente. Também era essencial prolongar a duração do momento da discussão e da apresentação dos resultados, de forma a permitir aos alunos, um maior número de oportunidades de desenvolver capacidades de CM, apesar de ser também relevante que os alunos tenham limites para concentrarem as suas respostas e trabalho. De referir que após a implementação das primeiras sessões, onde foi identificada esta situação (não conclusão das TI por parte dos alunos), foram tomadas medidas nas últimas sessões, entre elas, diminuir o número de itens a constar nas FTA.

Um ponto menos positivo que se destaca do presente estudo e passível de ser reformulado está relacionado com a não efetivação do momento iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido, na primeira e na última sessão. Esta estratégia não possibilitou a exploração e discussão das ideias matemáticas subjacentes às TI, da sessão 1 e 5, por conseguinte, não foi possível promover capacidades de comunicação

matemática, na vertente oral e por sua vez realizar uma caracterização inicial e uma avaliação final dos alunos, da CM na vertente oral.

Em relação ao questionário aplicado aos alunos, no final da implementação de todas as sessões, era fundamental aplicar um questionário após cada sessão de modo a obter opiniões dos alunos próximas do momento em que realizaram cada uma das TI. O questionário incluía itens relacionados com todas as sessões, sendo imprescindível que os alunos se lembrassem de situações particulares, ocorridas nas diversas sessões, requerendo assim um esforço mental elevado (o período de tempo da primeira para a última sessão foi aproximadamente 3 meses).

Daqui decorre a importância de aumentar o número de sessões a implementar no contexto do presente estudo de forma a efetivar mais um ciclo, pois esta é uma condição da I-A.

Apêndices

Apêndice A

GUIÃO DA ALUNA ESTAGIÁRIA INVESTIGADORA (GAEI)

Introdução

Nesta secção apresenta-se o GAEI relativo a cada uma das sessões implementadas no presente estudo. O GAEI de cada uma das sessões é constituído por duas partes, sendo que a primeira diz respeito ao enquadramento curricular da TI implementada, no contexto das sessões dinamizadas em sala de aula, orientadas para o promover capacidades de CM; na segunda parte apresentam-se orientações para a AEI durante a implementação das sessões.

Sessão 1 – Tarefa: *Vamos descobrir regularidades*

A. Enquadramento da Tarefa

A TI 1, intitulada *Vamos descobrir regularidades*, enquadra-se no tema matemático Números e Operações.

Tendo em conta o enunciado do PMEB (Ponte *et al.*, 2007) no âmbito do tema Números e Operações, o quadro seguinte evidencia os objetivos específicos a promover com a tarefa 1.

Tema e objetivos específicos matemáticos a desenvolver com a realização da tarefa 1

Tema: Números e Operações
Objetivos específicos ¹
<ul style="list-style-type: none">• Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural• Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação.• Investigar regularidades numéricas

Com a tarefa, em questão, pretende-se recolher dados que permitam caraterizar as capacidades de CM dos alunos, na vertente escrita, de acordo com o referencial teórico (quadro 1) referente à CM. No quadro que se segue identificam-se as capacidades ligadas à CM, a desenvolver com a realização da TI 1 - *Vamos encontrar regularidades*.

¹ Os enunciados são retirados de Ponte et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Capacidades de CM a desenvolver com a realização da TI

Vamos descobrir regularidades

		Capacidades de CM			
		Específicas		Transversais	
Itens da FTA Sessão 1	1	CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas		CT1 - Utilizar uma linguagem matemática <u>clara</u>	CT2- Utilizar uma linguagem matemática <u>rigorosa</u>
	2				
	3				
	4				
	2	CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos			
	4				
	2	CE3 – Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens	1. Organizar informações, dados, resultados		
3					

B. Orientações para a AEI

Esta sessão está estruturada de acordo com os dois primeiros momentos referidos por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho. O último momento (apresentação e discussão do trabalho desenvolvido) não é concretizado, dado que o objetivo desta sessão é realizar uma caracterização inicial dos alunos, ao nível de capacidades de CM, na vertente escrita, de forma individual.

A duração prevista para esta sessão – i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho – é de uma hora, porém, e na eventualidade, de os alunos requererem mais quinze minutos, deve ser-lhes concedido.

A organização dos alunos, na sala de aula, nesta sessão, deve ser distinta da habitual. Antes da resolução da tarefa, a AEI deve solicitar que os alunos, dois a dois, se dispunham frente a frente. Esta organização tem como fim garantir o trabalho individual, na medida em que se pretende obter uma caracterização inicial dos alunos ao nível das capacidades de CM na vertente escrita.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introduzir a tarefa a AEI deve mencionar expressões/comentários, tais como: *Hoje vamos realizar uma tarefa de matemática diferente. É uma tarefa de matemática que envolve investigação. Os meninos gostam de investigar/descobrir? De forma individual, os meninos vão se empenhar ao máximo nesta tarefa e tentar fazer muitas descobertas.*

Posteriormente, a AEI deve distribuir a FTA – *Vamos descobrir regularidades* (Apêndice B) – a cada um dos alunos, dado que esta TI será realizada individualmente. Em seguida, deve realizar uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes. Também deve referir a duração da TI.

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – a AEI deve circular pela sala e esclarecer algumas questões pontuais. Além disto a AEI deve efetuar registos escritos informais, no seu diário de bordo, com base nas observações realizadas. Estes registos poderão ser relevantes e frutíferos, para a AEI, em diferentes momentos: apresentação e discussão do trabalho desenvolvido nesta sessão, planificação das próximas sessões, e, essencialmente, para apresentação dos resultados e conclusões do presente estudo.

No decorrer da resolução da tarefa, se a AEI observar alunos a não resolver a tarefa ou distraídos deve referir comentários/questões, tais como, *Tenta lá encontrar mais regularidades; tenta ser mais claro/ preciso nesta resposta; vamos lá olhar com atenção para a tabela; conseguiste fazer apenas uma descoberta, tenta encontrar mais algumas.*

Após o momento do desenvolvimento do trabalho, a AEI deve recolher a FTA de cada aluno, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

Sessão 2 – Tarefa: *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*

A. Enquadramento da Tarefa

A TI 2, intitulada *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel* enquadra-se nos temas matemáticos: Geometria e Números e Operações.

Tendo em conta o enunciado do PMEB (Ponte *et al.*, 2007) no âmbito dos temas Geometria e Números e Operações, o quadro seguinte evidencia os objetivos específicos a promover com a tarefa 2.

Tema e objetivos específicos matemáticos a desenvolver com a realização da tarefa 2

Temas: Geometria ^a e Números e Operações ^b	
Objetivos específicos ²	
<ul style="list-style-type: none"> Identificar e representar retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, semi-retas e segmentos de reta, e identificar a sua posição relativa no plano^a Investigar regularidades numéricas^b 	

Com a tarefa, em questão, pretende-se promover capacidades de CM, de acordo com o referencial teórico (quadro 1) referente à CM, na vertente escrita e oral, dos alunos. No quadro que se segue identificam-se as capacidades ligadas à CM, a desenvolver com a realização da TI 2 - *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel*.

² Os enunciados são retirados de Ponte *et al.* (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Capacidades de CM a desenvolver com a realização da TI

Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel

		Capacidades de CM			
		Específicas		Transversais	
Itens da FTA da Sessão 2	3	CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas		CT1 - Utilizar uma linguagem matemática <u>clara</u>	CT2- Utilizar uma linguagem matemática <u>rigorosa</u>
	4				
	7				
	8				
	3	CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos			
	7				
	1	CE3 – Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens	1. Organizar informações, dados, resultados		
	2				
	5				
6					
Durante a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido		CE4 – Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática	1. Apresentar e justificar a sua posição 2. Compreender a posição de outrem 3. Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático 4. Negociar significado		

B. Orientações para a AEI

Esta sessão está estruturada de acordo com os três momentos referidos por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa, ii) desenvolvimento do trabalho e iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido.

A duração prevista para os dois primeiros momentos da TI, i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho, é de 1 hora. O tempo estipulado para o terceiro momento, iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido é de 30 minutos.

Os alunos nesta sessão serão organizados em grupos, de 4 elementos. A AEI deve ter a preocupação em estabelecer critérios na formação dos grupos.

Contrariamente à *sessão 1*, atendendo que nesta sessão são respeitados os três momentos próprios de uma TI considerados por Ponte e colaboradores (2006), de seguida apresentam-se as orientações para a AEI, segundo os três momentos:

i) Apresentação da tarefa

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introdução da tarefa a AEI deve referir expressões/questões, tais como: *Os meninos gostaram de efetuar a outra descoberta/investigação? Hoje vão resolver uma nova tarefa na qual terão que partir à procura de descobertas?*

Posteriormente, a AEI deve distribuir a FTA – *Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel* (Apêndice B) – a cada um dos alunos. Em seguida, deve realizar uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes.

Após a leitura dos itens integrantes na FTA, a AEI, deve referir que o trabalho a desenvolver depende, fundamentalmente, da iniciativa/trabalho do grupo, sublinhando que os alunos de um mesmo grupo devem cooperar entre si, na resposta às solicitações feitas, para que assim, obtenham resultados produtivos e eficazes. Deve salientar ainda, que caso surja alguma dúvida ou questão, que o grupo não consiga ultrapassar, podem solicitar o apoio da AEI. Também deve informar os alunos que o trabalho realizado pelos diferentes grupos será depois discutido e apresentado em grande grupo.

Este momento não deve exceder os 10 min. Depois das diversas indicações introdutórias, se surgir alguma dúvida, por parte dos alunos, a AEI deve esclarecer/clarificar no decorrer do desenvolvimento do trabalho dos alunos, de modo a rentabilizar o tempo disponível para a implementação da sessão.

ii) Desenvolvimento do trabalho

No segundo momento, a AEI deve observar e analisar como o trabalho dos alunos se processa e prestar apoio, sempre que necessário. Nesta fase, a AEI deve também efetuar alguns registos pontuais.

A AEI deve estimular a integração de conhecimentos matemáticos, explorados em aulas anteriores, no decurso da resolução da TI, com base nas seguintes questões/comentários (por exemplo): *Qual a diferença entre uma reta e um segmento de reta? Quais são as particularidades de um segmento de reta e de uma reta? Para que haja interseção de todas as retas, o que tem de haver em comum? Como é que vais organizar os teus dados na tabela? Lembra-te como fazemos nas aulas quando queremos organizar dados em tabelas.*

Antes de dar início ao terceiro momento – apresentação e discussão dos resultados – a AEI deve solicitar que os alunos não acrescentem nenhum registo na FTA, nas quais constarão as resoluções iniciais. Isto deve suceder para que a AEI tenha acesso às respostas iniciais de cada grupo, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

iii) Apresentação e discussão do trabalho desenvolvido

A AEI deve referir que os elementos de outros grupos podem solicitar a palavra para intervirem, para fazer uma questão ou um comentário, aquando da apresentação de uma questão por um determinado grupo e deve estimular os alunos a se questionarem mutuamente.

Deve também, nesta fase, despertar os alunos para a importância da justificação matemática dos seus resultados e conjecturas, desenvolvendo assim o poder de comunicar matematicamente.

No momento da discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos, a AEI deve explorar diversos aspetos matemáticos, relativos aos diferentes itens da FTA, a partir de diferentes questões formuladas pelos alunos e outras propostas por ela própria. A AEI deve solicitar que alunos de diferentes grupos apresentem os seus raciocínios e o trabalho desenvolvido.

No primeiro item é pretendido que os alunos encontrem o número máximo de partes em que uma tira ficava dividida, se na mesma é traçado 3, 4 ou 5 segmentos de reta, respetivamente, todos concorrentes entre si. Sabendo que com *um segmento de reta, o Miguel dividiu a tira de papel em 2 partes e noutra tira de papel, traçou dois segmentos de reta concorrentes (que se cruzam no mesmo e único ponto) e observou que dividiu a tira de papel em 4 partes*. Na FTA é apresentado 3 imagens, representado as tiras de papel, com o intuito de os alunos apresentarem o resultado para cada um dos casos solicitados. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Em quantas partes fica dividida a tira de papel se traçar na mesma 3 segmentos de reta? 4 Segmentos de reta? 5 Segmentos de reta? Algum grupo obteve outra resposta? Os segmentos podiam ser traçados paralelamente? Porquê?*

No item 2 é solicitado que os alunos construam uma tabela e organizem na mesma os resultados referentes ao item anterior. Os alunos devem organizar os dados de uma forma adequada, ordenada e precisa. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Quais foram os critérios que tiveram em consideração para a*

construção da tabela? Como representaram os dados na tabela? Quais são os tópicos que devem constar na tabela? Os nomes dos tópicos devem ser precisos e rigorosos? Justifica a tua resposta.

O pretendido no item 3 é que os alunos, tomando em consideração a tabela construída anteriormente, e sem usar a estratégia do desenho, conjecturem o número de partes em que fica dividida a tira de papel, se nesta o Miguel traça 8 segmentos de reta. Ainda neste item os alunos devem justificar a sua conjectura. A resposta pretendida é 16, dado que a relação existente entre o número de segmentos e número de partes obtidas é sempre o dobro. A regra que os alunos devem encontrar no item 4 é a referida anteriormente. Estes dois últimos itens podem ser apresentados e discutidos simultaneamente. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Por que razão a resposta é x? Qual foi o vosso raciocínio? Algum grupo pensou de outra forma? Por que razão afirmam que essa regra se aplica para todos os casos? Será importante testar vários casos, para descrever uma regra?*

No item 5 é apresentada uma situação semelhante a anterior, excetuando a posição dos segmentos de reta, ou seja, os alunos devem encontrar o número em que uma tira de papel ficava dividida “quando nele o Miguel traça um dois, três, ... segmentos de reta de tal modo que cada novo segmento de reta traçado intersecta (cruza) cada um dos já representados num único e distinto ponto (pelo que: entre cada dois segmentos de reta há um único ponto em comum e qualquer ponto de interseção é comum apenas a dois segmentos de reta)”. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Quais são as diferenças entre a primeira situação apresentada nesta TI e a presente nesta questão? Com 3 segmentos de reta, será que a tira de papel ficará dividida em mais partes, comparativamente à primeira situação? Em quantas partes fica dividida a tira de papel se traçar na mesma 3 segmentos de reta? 4 Segmentos de reta? 5 Segmentos de reta? Algum grupo obteve outra resposta?*

A sequência/objetivo dos seguintes itens, seguem a mesma linha que a situação apresentada precedentemente. No item 6 é solicitado que os alunos construam uma tabela e organizem na mesma os resultados referentes ao item anterior, de acordo com os novos resultados. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Quais foram os critérios que tiveram em consideração para a construção da desta nova tabela? Será semelhante à tabela construída na primeira situação? Como representaram os dados na tabela? Quais são os tópicos que devem constar na tabela? Por que razão é importante os nomes dos tópicos serem precisos e rigorosos?*

No item 7 é pretendido que os alunos, tomando em consideração a tabela, construída anteriormente, e sem usar a estratégia do desenho, conjecturem o número de partes em que ficava dividida a tira de papel, se nesta o Miguel traçasse 7 segmentos de reta. Ainda, neste item os alunos devem justificar a sua conjectura. A resposta pretendida é 29, dado que a regra existente entre o número de segmentos e número de partes obtidas é obtida a partir de um processo de recorrência, adicionando sempre um número da sequência dos números naturais, iniciando no número 2. Desta forma, do 1º caso para o 2º adiciona-se 2, do 2º caso para o 3º caso adiciona-se 3, e assim sucessivamente. A regra que os alunos devem encontrar no item 8 é a referida anteriormente. Estes dois últimos itens podem ser apresentados e discutidos em simultâneo e algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Por que razão a resposta é x? Qual foi o vosso raciocínio? Algum grupo pensou de outra forma? Por que razão afirmam que essa regra se aplica para todos os casos? Será possível encontrar outra regra para satisfazer as condições descritas? Justifica a tua resposta.*

No final da apresentação e discussão do trabalho desenvolvido (ou se os alunos manifestarem dificuldades em compreender alguma das duas situações apresentadas na FTA), a AEI deve apresentar uma apresentação em *PowerPoint* (Apêndice H) para uma melhor compreensão e visualização das respostas dos itens da FTA.

No fim da apresentação e discussão a AEI deve recolher a FTA de cada aluno, com a resolução inicial, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

Sessão 3 – Tarefa: *D^a Luísa e as Escadas*

A. Enquadramento da Tarefa

A TI 3, intitulada *D^a Luísa e as Escadas* enquadra-se no tema matemático Números e Operações.

Tendo em conta o enunciado do PMEB (Ponte *et al.*, 2007) no âmbito do tema Números e Operações, o quadro seguinte evidencia o objetivo específico a promover com a tarefa 3.

Tema e objetivo específico matemáticos a desenvolver com a realização da tarefa 3

Temas: Números e Operações^a
Objetivos específicos³
<ul style="list-style-type: none"> Investigar regularidades numéricas^a

Com a tarefa, em questão, pretende-se promover capacidades de CM, de acordo com o referencial teórico (quadro 1) referente à CM, na vertente escrita e oral, dos alunos. No quadro que se segue identificam-se as capacidades ligadas à CM, a desenvolver com a realização da TI 3 – *D^a Luísa e as Escadas*.

³ Os enunciados são retirados de Ponte et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Capacidades de CM a desenvolver com a realização da TI

D^a Luísa e as Escadas

		Capacidades de CM			
		Específicas		Transversais	
Itens da FTA da Sessão 3	1	CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas		CT1 - Utilizar uma linguagem matemática <u>clara</u>	CT2- Utilizar uma linguagem matemática <u>rigorosa</u>
	2				
	5				
	7				
	1	CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos			
	4	CE3 – Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens	1. Organizar informações, dados, resultados		
	3		2. Para testar ideias, relações, regularidades		
	6				
Durante a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido		CE4 – Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática	1. Apresentar e justificar a sua posição 2. Compreender a posição de outrem 3. Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático 4. Negociar significado		

B. Orientações para a AEI

Esta sessão, tal como a anterior, está estruturada de acordo com os três momentos referidos por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa, ii) desenvolvimento do trabalho e iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido.

A duração prevista para os dois primeiros momentos, i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho, é de 45 minutos. Se necessário, são disponibilizados ainda 15 minutos para finalizarem a resolução da tarefa. O tempo estipulado para a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido a pares é de 30 minutos.

Os alunos nesta sessão são organizados a pares, visto que na primeira sessão se verificou reduzida rentabilidade no trabalho desenvolvido pelos diferentes grupos.

Atendendo que nesta sessão são respeitados os três momentos próprios de uma TI considerados por Ponte e colaboradores (2006), de seguida apresentam-se algumas orientações para a AEI, segundo cada um dos três momentos:

i) Apresentação da tarefa

Como forma de introdução da tarefa a AEI deve referir expressões/questões, tais como: *Hoje, mais uma vez, terão que partir à descoberta. Assumirão um papel de verdadeiros matemáticos.*

Posteriormente, a AEI deve distribuir a FTA – Tarefa *D^a Luísa e as Escadas* (Apêndice B) – a cada um dos alunos da díade. Em seguida, a AEI deve realizar uma leitura oral de todos os itens da mesma, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes.

Após a leitura dos itens integrantes na FTA, a AEI deve referir que o trabalho a desenvolver depende, fundamentalmente, da iniciativa/trabalho do grupo, sublinhando que os alunos de um mesmo grupo devem cooperar entre si, na resposta às solicitações feitas, para que assim, obtenham resultados produtivos e eficazes. Deve salientar ainda, que caso surja alguma dúvida ou questão que o grupo não consiga ultrapassar, podem solicitar o apoio da AEI. Também, deve informar os alunos que o trabalho realizado pelos diferentes grupos é depois discutido e apresentado em grande grupo.

O momento de apresentação da tarefa não deve exceder os 10 min. Depois das diversas indicações introdutórias, se surgir alguma dúvida, por parte dos alunos, a AEI deve esclarecer/clarificar no decorrer do desenvolvimento do trabalho dos alunos, de modo a rentabilizar o tempo disponível para a implementação da sessão.

ii) Desenvolvimento do trabalho

No segundo momento, a AEI deve observar e analisar como o trabalho dos alunos se processa e prestar apoio, sempre que necessário. Nesta fase, a AEI deve também efetuar alguns registos pontuais.

Antes de dar início ao terceiro momento – apresentação e discussão dos resultados – a AEI deve referir que os alunos não acrescentem nenhum registo na FTA, nas quais constarão as resoluções iniciais. A AEI deve distribuir folhas quadriculadas, a cada um dos alunos, para procederem a resolução da TI nas mesmas, mediante a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido pelos alunos. Isto deve suceder para que assim a AEI tenha acesso às respostas iniciais de cada grupo, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

iii) Apresentação e discussão do trabalho desenvolvido

A AEI deve referir que os elementos de outros grupos podem solicitar a palavra para intervirem, para fazer uma questão ou um comentário, aquando da apresentação de uma questão por um determinado grupo e deve estimular os alunos a se questionarem mutuamente.

É importante, nesta fase, despertar os alunos para a importância da justificação matemática dos seus resultados e conjecturas, desenvolvendo assim o poder de CM.

No momento da discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos, a AEI deve explorar diversos aspetos matemáticos, relativos aos diferentes itens da FTA, a partir de diferentes questões formuladas pelos alunos e outras propostas por ela própria. A AEI deve solicitar que alunos de diferentes grupos apresentem os seus raciocínios e o trabalho desenvolvido.

No item 1 da FTA os alunos devem concluir que a D.^a Luísa tem, respetivamente, 1, 2 e 3 modos de subir as escadas, recorrendo a esquemas, desenhos ou palavras. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Quantos modos tem a D. Luísa para subir 1 degrau? 2 degraus? 3 degraus? Explica como pensaste? Algum grupo obteve respostas distintas? Algum grupo não recorreu ao desenho para representar as diferentes formas de subir os degraus?*

No item 2 os alunos devem conjecturar que a D.^a Luísa tem 4 modos de subir as escadas. Esta é a conjectura “mais aceite” neste item, mediante a resposta dada ao item anterior. Pois, se com 1 degrau tem 1 modo de subir as escadas, 2 degraus tem 2 modos de subir as escadas, 3 degraus tem 3 modos de subir as escadas e seguindo o mesmo raciocínio, com 4 degraus tem 4 modos de subir as escadas. Ou seja, o número de modos diferentes de subir uma escada usando o processo da D.^a Luísa, é igual ao número de degraus da escada. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Por que razão a resposta é 4? Como pensaram? Algum grupo pensou de outra forma?*

O pretendido no item 3 é que os alunos testem a conjectura formulada no item 2, ou seja, verifiquem recorrendo a esquemas, desenhos ou palavras, se com 4 degraus a D.^a Luísa tem (apenas) “4” modos de subir as escadas. Os alunos neste item devem verificar que há 5 modos de subir uma escada de 4 degraus. Constituindo, assim, um *contra-exemplo* para a conjectura formulada e, por isso, provando que a conjectura anterior é falsa. *“Argumentar através de um contra-exemplo é um processo acessível aos alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Através dele, prova-se a falsidade de*

conjeturas formuladas, o que pode incentivar a sua reformulação e aperfeiçoamento.” (Boavida *et al.*, 2008). Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *A vossa conjetura confirma-se? O que verificaram com esta questão? O que podemos concluir com esta questão? Por que razão é importante testar a formulação de uma conjetura? O que é um contra-exemplo?*

O objetivo pretendido no item 4 é a elaboração de uma tabela adequada e rigorosa, mediante os dados obtidos nos itens anteriores. Igualmente, este item permite a formulação de uma conjetura aperfeiçoada, a partir dos dados observados. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Como vamos representar os dados na tabela? Quais são os tópicos que devem constar na tabela? Os nomes dos tópicos devem ser precisos e rigorosos? Justifica a tua resposta.*

O item 5 deve estimular a análise dos dados da tabela, permitindo posteriormente, conjeturar que cada termo (número de modos), a partir do terceiro, se obtém adicionando os dois termos anteriores. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *Por que razão afirmam que a resposta a esta questão é [...]?* *Como pensaram? Algum grupo pensou de outra forma? Expliquem o vosso raciocínio.*

No item 6, a solicitação é testar a conjetura anterior, ou seja, verificar se para o caso de 6 degraus. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *A vossa conjetura confirma-se? E para 7 degraus, quantos modos de subir as escadas a D.^a Luísa tem?*

No último item, os alunos devem explicar como procederiam para saber de quantas maneiras diferentes se pode subir uma escada com um determinado número de degraus, misturando sempre as duas formas de subir as escadas, ou seja, cada termo (número de modos), se obtém adicionando os dois termos anteriores.

No fim da apresentação e discussão a AEI deve recolher a FTA de cada aluno, com a resolução inicial e as resoluções efetuadas nas folhas quadriculadas, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

Sessão 4 – Tarefa: *Dobragens e um só corte***A. Enquadramento da Tarefa**

A TI 4, intitulada *Dobragens e um só corte* enquadra-se nos temas matemáticos: Geometria e Números e Operações.

Tendo em conta o enunciado do PMEB (Ponte *et al.*, 2007) no âmbito dos temas: Geometria e Números e Operações, o quadro seguinte evidencia os objetivos específicos a promover com a tarefa 4.

Tema e objetivos específicos matemáticos a desenvolver com a realização da tarefa 4

Temas: Geometria ^a e Números e Operações ^b
Objetivos específicos ⁴
<ul style="list-style-type: none">• Reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações^a• Investigar regularidades numéricas^b

Com a tarefa, em questão, pretende-se promover capacidades de CM, de acordo com o referencial teórico (quadro 1) referente à CM, na vertente escrita e oral, dos alunos. No quadro que se segue identificam-se as capacidades ligadas à CM, a desenvolver com a realização da TI 4 – *Dobragens e um só corte*.

⁴ Os enunciados são retirados de Ponte *et al.* (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Capacidades de CM a desenvolver com a realização da TI

Dobragens e um só corte

		Capacidades de CM			
		Específicas		Transversais	
Itens da FTA da Sessão 4	2	CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas		CT1 - Utilizar uma linguagem matemática <u>clara</u>	CT2- Utilizar uma linguagem matemática <u>rigorosa</u>
	5				
	7a				
	7b				
	2	CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos			
	5				
	4	CE3 – Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens	2. Organizar informações, dados, resultados		
	7c		3. Para testar ideias, relações, regularidades		
	8				
3					
6					
Durante a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido		CE4 – Interagir com o outro numa situação que envolva informação matemática	5. Apresentar e justificar a sua posição 6. Compreender a posição de outrem 7. Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático 8. Negociar significado		

B. Orientações para a AEI

Esta sessão está estruturada de acordo com os três momentos referidos por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa, ii) desenvolvimento do trabalho e iii) apresentação e discussão do trabalho desenvolvido.

A duração prevista para os dois primeiros momentos, i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho, é de 45 minutos. Se necessário, são disponibilizados ainda 15 minutos para finalizarem a resolução da tarefa. O tempo estipulado para a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido a pares é de 30 minutos.

À semelhança da sessão anterior, a TI desta sessão é efetuada a pares (mesmo grupos que na sessão anterior).

Atendendo que nesta sessão são respeitados os três momentos próprios de uma TI considerados por Ponte e colaboradores (2006), de seguida apresentam-se algumas orientações para a AEI, segundo cada um dos três momentos:

i) Apresentação da tarefa

Como forma de introdução da tarefa a AEI deve referir expressões/questões, tais como: *Mais uma vez vamos explorar uma situação matemática na qual vocês assumirão o papel de investigadores matemáticos.*

Posteriormente, a AEI deve distribuir a FTA – *Dobragens e um só corte* (Apêndice B) – aos alunos, em suporte papel. Num primeiro momento a AEI deve distribuir a primeira da FTA, posteriormente, a segunda parte da FTA (após 30 minutos). Não é entregue a FTA na totalidade, pois no item 4 é pretendido que os alunos construam uma tabela e se, a FTA não é entregue parcialmente, os alunos teriam como modelo a tabela do item 7. Assim como a AEI deve distribuir a cada um dos alunos várias folhas A₄ brancas, para efetuarem cortes nas mesmas conforme solicitações da FTA. Em seguida deve realizar uma leitura oral de todos os itens da FTA, para uma melhor compreensão dos mesmos, clarificando alguns termos menos presentes

Após a leitura dos itens integrantes na FTA, a AEI deve referir que o trabalho a desenvolver depende, fundamentalmente, da iniciativa/trabalho do grupo, sublinhando que os alunos de um mesmo grupo devem cooperar entre si, na resposta às solicitações feitas, para que assim, obtenham resultados produtivos e eficazes. Deve salientar ainda, que caso surja alguma dúvida ou questão que o grupo não consiga ultrapassar, podem solicitar o apoio da AEI. A AEI deve informar, também, os alunos que o trabalho realizado pelos diferentes grupos é depois discutido/apresentado em grande grupo.

O momento de apresentação da tarefa não deve exceder os 10 min. Depois das diversas indicações introdutórias, se surgir alguma dúvida, por parte dos alunos, a AEI deve esclarecer/clarificar no decorrer do desenvolvimento do trabalho dos alunos, de modo a rentabilizar o tempo disponível para a implementação da sessão.

ii) Desenvolvimento do trabalho

No segundo momento, a AEI deve observar e analisar como o trabalho dos alunos se processa e prestar apoio, sempre que necessário. Nesta fase, a AEI deve também efetuar alguns registos pontuais,

Antes de dar início ao terceiro momento – apresentação e discussão dos resultados – a AEI deve referir que os alunos não acrescentem nenhum registo na FTA, nas quais constarão as resoluções iniciais. Isto deve suceder para que assim a AEI tenha acesso às respostas iniciais de cada grupo, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

iii) Apresentação e discussão do trabalho desenvolvido

A AEI deve referir que os elementos dos outros grupos podem solicitar a palavra para intervirem, seja para fazer uma questão ou um comentário, aquando da apresentação de uma questão por um determinado grupo e deve estimular os alunos a se questionarem mutuamente. É importante, nesta fase, despertar os alunos para a importância da justificação matemática dos seus resultados e conjeturas, desenvolvendo assim o poder de CM.

No momento da discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos, a AEI deve explorar diversos aspetos matemáticos, relativos aos diferentes itens da FTA, a partir de diferentes questões formuladas pelos alunos e outras propostas por ela própria. A AEI deve solicitar que alunos de diferentes grupos apresentem os seus raciocínios e o trabalho desenvolvido.

No primeiro item pretende-se que os alunos sigam as indicações da FTA e registem o número de figuras obtidas. A AEI deve questionar se algum grupo obteve um resultado diferente e, em conjunto, discutir a sua (in)validade.

O objetivo do segundo item é que os alunos, sem o auxílio de uma folha de papel, conjeturem o número de figuras obtidas, a partir de três dobragens e um corte, como ilustrado na imagem da FTA. A AEI deve solicitar que diferentes grupos refiram a sua resposta e justifiquem o porquê da mesma. É fundamental, a AEI compreender o porquê dos alunos optarem por um determinado número de figuras obtidas, permitindo assim despertar os alunos para a importância da justificação matemática das suas conjeturas, desenvolvendo o poder de comunicar matematicamente.

No terceiro item pretende-se que os alunos testem/verifiquem a conjetura formulada no item 2. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *As conjeturas formuladas confirmam-se? Por que razão é importante testar as conjeturas formuladas? Será que a partir dos dois casos explorados, podemos generalizar para todos os casos? Justifica a tua resposta.*

O objetivo primordial do quarto item é que os alunos construam uma tabela com os resultados obtidos nas respostas anteriores. A AEI deve explorar diferentes propostas de apresentação dos dados e sua eficácia/pertinência. Algumas das possíveis questões a explorar nesta situação são: *A designação dos diferentes tópicos, constantes na tabela, deve ser precisa e rigorosa? Justifica a tua resposta. Quantos casos foram explorados? A forma de apresentar os resultados, pelo grupo x, é a mais adequada? Justifica.*

O pretendido nos itens 5 e 6 segue, parcialmente, a mesma linha de raciocínio matemático, dos itens 2 e 3, respetivamente. A diferença é que nestes itens os alunos, nomeadamente, no item 5, tendo em conta as respostas anteriores, respondam de uma forma mais criteriosa e fundamentada, ao contrário da resposta 2.

O sétimo item está organizado em três alíneas. Na primeira pretende-se que os alunos encontrem uma relação entre os diferentes números de figuras obtidas, ou seja, para obter o número de figuras obtidas é sempre o dobro do obtido na linha anterior da tabela, sendo este um processo recursivo. Na segunda alínea os alunos devem relacionar o número de dobragens e o número total de lados, considerando todas as figuras obtidas. O pretendido é que os alunos concluam que o número total de lados das figuras obtidas é sempre o quádruplo do número máximo de figuras obtidas na respetiva linha da tabela. Durante a discussão, a AEI deve estimular outros aspetos matemáticos, nesta mesma alínea, a partir das seguintes questões: i) *Na relação dos diferentes números de lados das figuras obtidos está patente o processo de recorrência?* O número total de lados das figuras, à semelhança da alínea anterior, é um processo recursivo, ou seja, o número total de lados obtidos é sempre o dobro do obtido na linha anterior da tabela; ii) *Relativamente ao número total de lados das figuras obtidas, conseguem descobrir alguma relação, sem recorrer ao processo de recorrência?* O número total de lados das figuras obtidas resulta do produto do mesmo fator, intimamente, relacionado com o número de vezes correspondente ao número de dobragens, neste caso fator 2. Nesta relação está implícito o conceito de potência, porém, neste nível de escolaridade não é abordado desta forma, mas sim de uma forma implícita, pois não são tópicos presentes no PMEB (Ponte *et al.*, 2007) do 3º ano. Posto isto, e mediante as relações descobertas/verificadas anteriormente, na alínea c, pretende-se que os alunos preencham as duas últimas linhas do quadro.

No último item, o objetivo é desenvolver a CM, a partir da expressão da linguagem matemática escrita, ou seja, os alunos devem imaginar que os seus pais lhes questionam acerca do trabalho realizado, naquele dia, na escola, na área da matemática e escrever um pequeno texto descritivo sobre o tema.

No fim da apresentação e discussão a AEI deve recolher a FTA de cada aluno, com a resolução inicial e as folhas brancas com cortes, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

Sessão 5 – Tarefa: À volta das tabuadas

A. Enquadramento da Tarefa

A TI 5, intitulada *À volta das tabuadas*, enquadra-se no tema matemático Números e Operações.

Tendo em conta o enunciado do PMEB (Ponte *et al.*, 2007) no âmbito do tema Números e Operações, o quadro seguinte evidencia os objetivos específicos a promover com a tarefa 5.

Tema e objetivos específicos matemáticos a desenvolver com a realização da tarefa 5

Temas: Números e Operações
Objetivos específicos ⁵
<ul style="list-style-type: none"> • Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação. • Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural • Investigar regularidades numéricas

Com a tarefa, em questão, pretende-se recolher dados que permitam efetuar uma avaliação final aos alunos, sobre as capacidades de CM, na vertente escrita, de acordo com o referencial teórico (quadro 1) referente à CM. No quadro que se segue identificam-se as capacidades ligadas à CM, a desenvolver com a realização da TI 5 – *À volta das tabuadas*.

⁵ Os enunciados são retirados de Ponte *et al.* (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Capacidades de CM a desenvolver com a realização da TI

À volta das tabuadas

		Capacidades de CM			
		Específicas		Transversais	
Itens da FTA Sessão 5	2	CE1 – Expressar ideias, relações, regularidades identificadas		CT1 - Utilizar uma linguagem matemática clara	CT2- Utilizar uma linguagem matemática <u>rigorosa</u>
	3				
	5				
	6				
	7				
	4	CE2 – Justificar e/ou explicar ideias, relações, regularidades, estratégias, procedimentos			
	1	CE3 – Utilizar/usar representações e/ou combinar linguagens	1. Organizar informações, dados, resultados		
3					

B. Orientações para a AEI

Esta sessão, tal como a primeira sessão, está estruturada de acordo com os dois primeiros momentos referidos por autores como Ponte e colaboradores (2006) para uma aula em que é proposta a realização de uma TI: i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho. O último momento (apresentação e discussão do trabalho desenvolvido) não foi concretizado, dado que o objetivo desta sessão é realizar uma avaliação final, aos alunos, ao nível da CM, na vertente escrita.

Esta última TI é detentora de diversas particularidades: tarefa com o mesmo tema matemático que a inicial; implicação da utilização de recursos matemáticos, neste caso concreto, a calculadora; evidência de idênticos objetivos específicos do tema matemático mais explorado durante todas as sessões, designadamente, Números e Operações.

A duração prevista para esta sessão, i) apresentação da tarefa e ii) desenvolvimento do trabalho, é de uma hora, porém, e na eventualidade, de os alunos requererem mais quinze minutos, deve ser-lhes concedido.

À semelhança da primeira tarefa, a organização dos alunos, na sala de aula, nesta sessão é distinta da habitual. Antes da resolução da tarefa, a AEI deve solicitar que os alunos, dois a dois, se dispunham frente a frente. Esta organização tem como fim garantir o trabalho individual, na medida em que se pretende obter uma avaliação final dos alunos ao nível das capacidades de CM na vertente escrita.

A AEI, antes de iniciar a sessão, deve assegurar que todos os alunos possuam uma calculadora básica, pois este instrumento é fundamental para a resolução da TI em questão.

No primeiro momento – apresentação da tarefa – como forma de introdução da tarefa, a AEI deve referir expressões/questões, tais como: *Esta é a última situação na qual vocês assumirão o papel de investigadores matemáticos. Hoje, vão se empenhar, tal e qual, os verdadeiros matemáticos.*

A AEI deve distribuir a FTA – *À volta das tabuadas* (Apêndice B) – a cada um dos alunos, dado que esta TI será realizada individualmente. A AEI deve realizar uma leitura dos itens da FTA e referir a duração da mesma.

No segundo momento – desenvolvimento do trabalho – a AEI deve circular pela sala e esclarecer apenas dúvidas pontuais.

No decorrer da resolução da TI, se a AEI observar alguns alunos a não resolver a tarefa ou distraídos deve referir comentários/questões, tais como, *Tenta lá encontrar mais regularidades; tenta ser mais claro/ preciso nesta resposta; vamos lá olhar com atenção para a tabela; conseguiste fazer apenas uma descoberta, tenta encontrar mais algumas.*

Após o momento do desenvolvimento do trabalho, a AEI deve recolher a FTA, de cada aluno, com a resolução, a fim de fazer, posteriormente, uma análise de conteúdo das produções dos alunos no tocante, ao uso de capacidades de CM.

Apêndice B

FICHAS DE TRABALHO

DO ALUNO

(FTA)

Introdução

O conjunto de FTA que a seguir se apresenta faz parte de um conjunto de TI orientadas para a CM na promoção de capacidades de CM.

Tarefa 1 – Vamos encontrar regularidades

Nome: _____ Data: _____

Lê com atenção todas as questões.

Em todas as questões, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Usa os espaços em branco para registares as tuas respostas.

1. Observa com atenção a tabela seguinte.

- O que podes afirmar sobre os números da tabela?
Descreve as descobertas que fizeste e as regularidades que descobriste.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

2. Usa lápis de cores diferentes e

- Pinta da mesma cor todos os números que são múltiplos de 5, ou seja, começa no 5 e vai pintando todos os números de 5 em 5.
- Pinta de cor diferente da usada em resposta anterior, todos os números que são múltiplos de 10, ou seja, começa no 10 e vai pintando todos os números de 10 em 10.
- Há números que ficaram pintados com duas cores. Quais são? Explica porquê?
- O que descobriste sobre os múltiplos de 10 e de 5?

3. Usa uma cor diferente das anteriores. Pinta todos os números pares (múltiplos de 2) da tabela.

- O que descobriste?

4. Há números que ficaram pintados com três cores.

- Quais são? Explica porquê?

Bom trabalho!!!



(Retirado de Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. & Gonçalves, F. (2010). Números e Operações: 3ºano.

Lisboa: Ministério da Educação. p. 19)

Tarefa 2 – Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel

Nome: _____ Data: _____

Lê com atenção todas as questões.

Em todas as questões, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e esquemas que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Usa os espaços em branco para registares as tuas respostas.

O Miguel tinha em cima da sua mesa várias tiras de papel. Numa delas, desenhou um segmento de reta e dividiu a tira de papel em 2 partes. Noutra tira de papel, traçou dois segmentos de reta concorrentes (que se cruzam no mesmo e único ponto) e observou que dividiu a tira de papel em 4 partes. O esquema seguinte ilustra o que o Miguel fez.



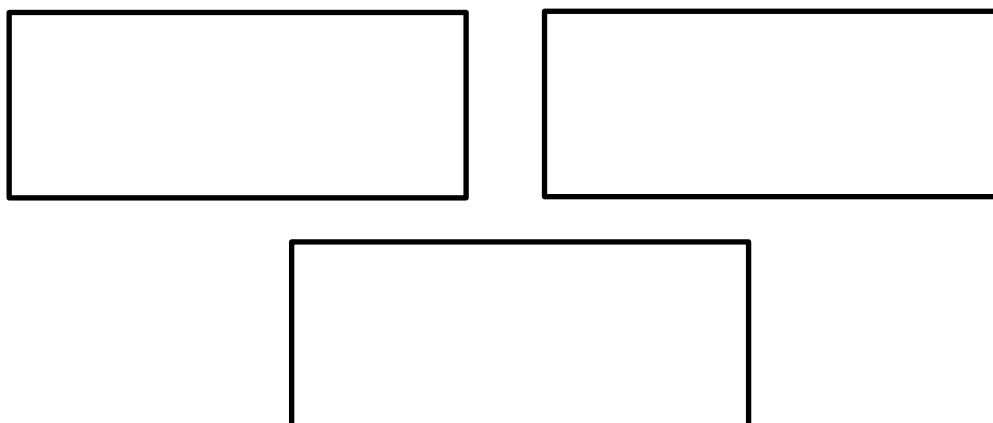
- 1) Ajuda o Miguel a encontrar o número de partes em que uma tira de papel fica dividida se na mesma traçar 3, 4 ou 5 segmentos de reta todos concorrentes entre si.



- 2) Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na alínea 1.

- 3) Tendo em atenção a tabela anterior, sem usar a estratégia do desenho, qual o número de partes em que pensas que fica dividida a tira de papel se nesta o Miguel traçar 8 segmentos de reta, concorrentes entre si. Explica, por palavras, como pensaste.
- 4) Encontra e descreve uma regra que te permita descobrir em quantas partes fica dividida a tira de papel, qualquer que seja o número de segmentos de reta, todos concorrentes entre si, que nela são traçados.
- 5) O Miguel quer descobrir o número de partes em que, sucessivamente, uma tira de papel fica dividida quando nele traça um dois, três, ... segmentos de reta de tal modo que cada novo segmento de reta traçado intersecta (cruza) cada um dos já representados num único e distinto ponto (pelo que: entre cada dois segmentos de reta há um único ponto em comum e qualquer ponto de interseção é comum apenas a dois segmentos de reta).

O Miguel descobriu que os resultados com 1 e 2 segmentos de reta são iguais à descoberta efetuada anteriormente. Investiga o que acontece no caso de 3, de 4 e de 5 segmentos de reta.



- 6) Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na alínea 5.
- 7) Tendo em atenção a tabela anterior, sem usar a estratégia do desenho, qual o número de partes em que pensas que fica dividida uma tira de papel se nesta o Miguel traçar 7 segmentos de reta. Explica, por palavras, como pensaste.

- 8) Encontra e descreve uma regra que te permita descobrir em quantas partes fica dividida uma tira de papel, qualquer que seja o número de segmentos de reta que nela são traçados nas condições acima descritas.

Bom trabalho!!!



Tarefa 3 - D.^a Luísa e as escadas

Nome: _____ Data: _____

*Lê com atenção todas as questões.**Em todas as questões, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.**Usa os espaços em branco para registares as tuas respostas.*

A D.^a Luísa, sempre que pode, prefere as escadas ao elevador. Por vezes, sobe as escadas degrau a degrau (passo). Outras vezes, quando está com pressa, salta dois degraus de uma vez, ou seja, salta e passa por cima de um degrau (salto).



1. Se misturar estas duas maneiras de subir escadas, quantos modos diferentes tem a D.^a Luísa de subir uma escada de 1, 2, e 3 degraus? Explica como pensaste.
2. Sem recorrer a desenhos, nem a esquemas, quantos modos diferentes pensas que tem a D.^a Luísa de subir uma escada 4 degraus, misturando as duas maneiras de subir as escadas?
3. Verifica/testa a conjectura que formulaste, em resposta à questão 2, usando a estratégia que consideras mais adequada.
4. Constrói uma tabela e organiza todos os dados obtidos na resposta às questões anteriores.

5. Tendo em atenção a tabela anterior, e sem recorrer a desenhos, nem a esquemas, quantos modos diferentes pensas que tem a D.^a Luísa de subir uma escada de 6 degraus, misturando as duas maneiras de subir as escadas?
6. Verifica/testa a conjectura que formulaste, em resposta à questão 5, usando a estratégia que consideras mais adequada.
7. Como procederias para saber de quantas maneiras diferentes se pode subir uma escada com um determinado número de degraus, misturando sempre as duas formas de subir as escadas. Explica como pensaste.



Bom trabalho!!!

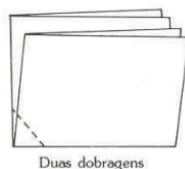
(Adaptada da brochura: Boavida *et al.* (2008). A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: ME-DEB, p.93)

Tarefa 4 – Dobragens e um só corte

Nome: _____ Data: _____

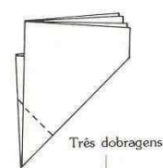
*Lê com atenção todas as questões.**Em todas as questões, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e esquemas que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.**Usa os espaços em branco para registares as tuas respostas.***Primeira Parte**

1. Realiza duas dobragens numa folha de papel e um corte, como mostra a imagem.



Regista o número de figuras que obténs.

2. Sem executares, quantas figuras pensas que obténs com três dobragens e um corte numa folha de papel, como mostra a imagem. Explica, por palavras, como pensaste.



3. Verifica/testa a conjectura que formulaste, na resposta à questão 2, e apresenta os resultados obtidos.
4. Constrói uma tabela e organiza os resultados obtidos na resposta às questões anteriores, de forma precisa e adequada.

5. Novamente sem executares, quantas figuras pensas que obténs com quatro dobragens e um corte numa folha de papel, como ilustra a imagem. Explica, por palavras, como pensaste.



6. Verifica/testa a conjectura que formulaste, na resposta à questão 5 e apresenta os resultados obtidos.

Segunda parte

7. Tendo em conta as respostas anteriores, preenche o quadro seguinte.

Nº de dobragens	Número de figuras obtidas	Nº total de lados das figuras obtidas
2		
3		
4		

- Existe alguma relação entre os diferentes números de figuras obtidas. Se sim, explica, por palavras tuas, essa relação.
 - Existe alguma relação entre o número de dobragens e o número total de lados considerando todas as figuras obtidas? Se sim, enuncia-a, por palavras tuas?
 - Com base nas relações que identificaste, acrescenta na tabela, os resultados para 5 e 6 dobragens, respetivamente.
8. Imagina que os teus pais te questionam acerca do trabalho que realizaste, hoje, na escola, na área da matemática, o que lhes dirias? (sugestão: refere o que te foi proposto, como resolveste e pensaste...).



Bom trabalho!!!

Adaptado de: *Ponte et al. (2006). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.*

Tarefa 5 - À volta das tabuadas

Nome: _____ Data: _____

Lê com atenção todas as questões.

Em todas as questões, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos e esquemas que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Usa os espaços em branco para registares as tuas respostas.

Liga a calculadora (no visor aparece 0).

- Obtém e regista na tabela, os primeiros 20 múltiplos de 7. Adiciona ao número zero (patente no visor), clicando a tecla com o sinal +, o número sete e depois usa a parcela 7 como “constante”, clicando, para tal sucessivamente 20 vezes na tecla do igual =, como ilustram as imagens.



0									

- Que relação existe entre cada um dos números da segunda linha e o correspondente na primeira linha?

3. Faz o mesmo que nas questões 1 e 2 para outros três números.

0									
0									
0									

4. Encontras alguma explicação para que, frequentemente, as tabuadas da multiplicação contêm os primeiros onze múltiplos dos dez primeiros números 1, 2, ..., 10?
5. Regista os quinze primeiros múltiplos de 2, de 7 e de 9. Observas alguma regularidade. Se sim, descreve essa regularidade.
6. E o que acontece com os múltiplos de 3, de 5 e de 8?
7. Tendo por base o observado em 5, e em 6, podes formular uma conjectura. Qual será? Por que razões será verdadeira essa conjectura?

Bom trabalho! 😊

Adaptado de: *Carvalho, A., Gaio, A., Ribeiro, D., Nunes, F., Veloso, G., Valério, N., Almeida, P., Mestre, R. e Canário, S. (2011). Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.*

Apêndice C

Questionário

Questionário

Nome: _____ **Data:** _____

Neste questionário são feitas afirmações e perguntas para conhecer a tua opinião sobre as aulas de matemática em que realizaste tarefas de investigação e sobre o teu desempenho no âmbito das mesmas. Lê todas as afirmações e perguntas com atenção e responde com sinceridade.

































Primeira Parte

Na primeira parte são apresentadas quatro “CARAS”:

































































































 **Discordo totalmente**
 **Discordo**
 **Concordo**
 **Concordo Totalmente**

Para cada afirmação, assinala a “CARA” que melhor corresponde à tua opinião.

Trabalho individual

O meu desempenho:	Tarefa	
	<i>Vamos encontrar regularidades</i>	<i>À volta das tabuadas</i>
Fui capaz de exprimir o que penso	   	   
Fui capaz de justificar o que penso	   	   
Fui capaz de usar linguagem matemática de forma adequada	   	   
Fui capaz de interpretar textos (nomeadamente o enunciado das tarefas)	   	   

Trabalho em grupo

O meu desempenho:	Tarefa		
	<i>Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel</i>	<i>D.^a Luísa e as escadas</i>	<i>Dobragens e um só corte</i>
Fui capaz de respeitar a opinião dos meus colegas	   	   	   
Fui capaz de escutar a opinião dos meus colegas	   	   	   
Fui capaz de justificar o que penso	   	   	   
Fui capaz de fazer perguntas adequadas aos meus colegas para perceber como pensam	   	   	   
Fui capaz de dizer por palavras minhas o que os meus colegas pensam	   	   	   
Fui capaz de interpretar tabelas	   	   	   
Fui capaz de interpretar textos (nomeadamente o enunciado das tarefas)	   	   	   
Fui capaz de usar linguagem matemática de forma adequada	   	   	   

- Gostei mais das tarefas (assinala um X uma das opções de resposta):

Trabalho em grupo ☐ Trabalho individual ☐

Justifica a tua escolha:

- Escreve o nome da tarefa realizada, na qual verificaste uma maior evolução na tua aprendizagem matemática: _____

























Segunda Parte

Na segunda parte são apresentadas quatro “CARAS”:





















 **Muito Pouco**  **Pouco**  **Mais**  **Muito mais**

Para cada afirmação, assinala a CARA que melhor corresponde à tua opinião

- Com a realização de tarefas de investigação, as aulas de matemática são ... do que as aulas de matemática em que não realizo tarefas de investigação.

- aborrecidas    
- interessantes    
- motivantes    
- cansativas    
- produtivas     (a nível do promover a aprendizagem matemática)
- Outro (a): _____    

- Nas aulas de matemática em que eu realizei tarefas de investigação:

- fui     participativo
- estive     atento
- desejei ir     vezes ao quadro apresentar a resolução das tarefas
- senti-me     motivado
- compreendi     os assuntos matemáticos explorados

Obrigada pelo tempo despendido!



Apêndice D

Instrumento de análise das produções orais dos alunos no contexto das sessões 2, 3 e 4

**Instrumento de análise das produções orais dos alunos
no contexto das sessões 2, 3 ,4**

Data da análise: _____ Data da sessão: _____ Sessão nº: _____

Indicações de preenchimento: Se a capacidade foi observada registrar a situação através de um V e uma descrição sucinta ou a transcrição da frase do aluno.

Capacidades específicas de CM	Registo de evidência	
	V	Descrição ou transcrição
CE4.1 – Apresenta e justifica a sua posição		
CE4.2 – Compreende a posição de outrem		
CE4.3 – Questiona e responde a questões de esclarecimento do pensamento matemático		
CE4.4 – Negocia significado		

Apêndice E

Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da
realização das FTA

Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da FTA 1

Indicações de preenchimento: Se a capacidade foi observada registrar a situação através de um V e uma descrição sucinta ou da transcrição da frase do aluno.

Data da sessão: _____ Sessão nº: _____

		Capacidades de CM									
		Específicas						Transversais			
		CE1		CE2		CE3.1		CT3		CT2	
		Registo de evidência									
		V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição
Itens da FTA	1										
	2										
	3										
	4										

Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da FTA 2

Indicações de preenchimento: Se a capacidade foi observada registar a situação através de um V e uma descrição sucinta ou da transcrição da frase do aluno.

Data da sessão: _____ Sessão nº: _____

		Capacidades de CM									
		Específicas						Transversais			
		CE1		CE2		CE3.1		CT3		CT2	
		Registo de evidência									
		V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição
Itens da FTA	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										
	8										

Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da FTA 3

Indicações de preenchimento: Se a capacidade foi observada registrar a situação através de um V e uma descrição sucinta ou da transcrição da frase do aluno.

Data da sessão: _____ Sessão nº: _____

		Capacidades de CM											
		Específicas								Transversais			
		CE1		CE2		CE3.1		CE3.2		CT3		CT2	
				Registo de evidência									
		V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição
Itens da FTA	1												
	2												
	3												
	4												
	5												
	6												
	7												

Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da FTA 4

Indicações de preenchimento: Se a capacidade foi observada registar a situação através de um V e uma descrição sucinta ou da transcrição da frase do aluno.

Data da sessão: _____ Sessão nº: _____

		Capacidades de CM											
		Específicas								Transversais			
		CE1		CE2		CE3.1		CE3.2		CT3		CT2	
		Registo de evidência											
		V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição
Itens da FTA	2												
	3												
	4												
	5												
	6												
	7a												
	7b												
	7c												
	8												

Instrumento de análise das produções escritas dos alunos no contexto da FTA 5

Indicações de preenchimento: Se a capacidade foi observada registrar a situação através de um V e uma descrição sucinta ou da transcrição da frase do aluno.

Data da sessão: _____ Sessão nº: _____

		Capacidades de CM									
		Específicas						Transversais			
		CE1		CE2		CE3.1		CT3		CT2	
		Registo de evidência									
		V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição	V	Descrição ou transcrição
Itens da FTA	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										

Apêndice F

Convenções utilizadas na transcrição das gravações

(adaptadas de Martins, 1989)

Convenções utilizadas na transcrição das gravações
(adaptadas de Martins, 1989)

Descrição do comportamento verbal	Notação utilizada
Aluno a falar	A
Aluna Estagiária Investigadora	AEI
Pausa curta ($t < 3$ s)	&
Pausa longa ($3 \text{ s} < t < 7\text{s}$)	<
Falar em simultâneo	...
Palavra não identificada	(*)
Gagueja	Ahm
Sinal que a AEI acompanha o discurso do aluno	Uhm
Ação dos alunos ou da AEI	(descrição da ação)

Apêndice G

Transcrição da gravação áudio do momento da apresentação e
discussão do trabalho desenvolvido – Sessão 2

Transcrição da gravação áudio do momento da apresentação e discussão do trabalho desenvolvido – Sessão 2

(A professora lê o item 1 da FTA e solicita que a A16 e a A20 se dirijam à frente)

AEI – A A20 explica como fizeram para o 1º caso. A16 explica como fizeram para o 2º caso e depois a A20 volta a explicar como fizeram para o 3º caso.

A20 – Fizemos um traço & ahm

AEI – Um traço & Alguém consegue ser mais preciso e rigoroso?

A13 – um segmento de reta.

AEI - Muito bem. Continua A20 & traçaram um segmento de reta e?

A20 – Fizemos um segmento de reta na vertical & depois fizemos outro segmento de reta na horizo ahm na diagonal e depois o outro segmento de reta também na diagonal. Este ahm fizemos com três segmentos de reta.

AEI – Três segmentos de reta. E quantas partes obtiveram?

A20 – 6

AEI – 6. Podes agora exemplificar aos teus colegas & como chegaste a esse resultado.

(A A20 mostra o seu resultado a partir da sua FTA).

AEI – Todos obtiveram 6 partes?

Vários alunos – Sim...

AEI – Por que razão não fizeste desta forma & A22?

(A AEI representa o exemplo que se segue no quadro).



A22 – Porque ahm os segmentos de reta não se cruzam ahm não se encontram.

AEI – Quem consegue ser mais preciso e rigoroso?

A4 – Não se encontravam ahm

AEI – Disseste a mesma coisa que a A22.

Duas alunas – Não se cruzam no mesmo ponto.

AEI – E alguém sabe como se designa as retas ou os segmentos de reta que se cruzam no mesmo ponto?

Duas alunas – Concorrentes

AEI – Concorrentes & retas concorrentes ou segmentos de reta concorrentes. Muito bem. Recapitulando & tínhamos uma condição no enunciado & que era “os segmentos de reta teriam de ser concorrentes e todos no mesmo ponto”. Daí que a vossa colega fez daquela forma. Podes mostrar mais uma vez. E obtivemos 6 partes & como os restantes alunos.

AEI – A16 explica como fizeram para o 2º caso. Não é necessário explicar como traçaram os segmentos & na diagonal & na vertical & etc. Apenas indica quantos segmentos representaram e quantas partes obtiveram?

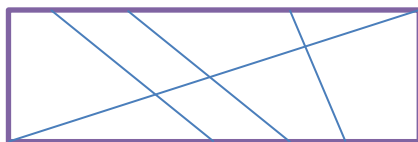
A16 – Fiz quatro segmentos e obtive & 8 partes.

AEI – 8 partes. Todos chegaram ao mesmo resultado?

AEI – A16 & mostra aos teus colegas a disposição dos teus segmentos de reta.

...

AEI – Qual é a condição expressa no enunciado & que indica que os segmentos têm de ser dispostos desta forma? Porque não colocou desta forma?



Vários alunos – Porque ahm

A12 – Porque não são concorrentes.

AEI – Sim & são concorrentes.

A12 – só que não se cruzam & no mesmo ahm

...

AEI – Os quatro segmentos de reta não se cruzam no mesmo ponto.

A1 – De interseção.

AEI - Todos os segmentos de reta não têm o mesmo ponto de interseção. Muito bem & A1.

AEI – Vamos agora avançar para o próximo caso. A20 & com 5 segmentos de reta.

A20 – Fizemos 5 segmentos e obtivemos 10 partes.

AEI – 10 partes. A1 & por que razão não fizeste desta forma? (A AEI representa no quadro um exemplo semelhante ao anterior, com os segmentos de reta a não se intersectarem no mesmo ponto)

A1 – Porque & ahm não se encontram todos os segmentos de reta no mesmo ponto de interseção.

AEI – Ou seja & todos os segmentos de reta não se cruzam no mesmo ponto.

(A AEI solicita que as duas alunas que estavam a apresentar se sentem e pede que dois elementos de outro grupo se dirijam à frente. Este grupo foi selecionado, por ter efetuado uma tabela com uma forma de organização incorreta e confusa).

(A AEI solicita que um dos alunos efetue a tabela no quadro).

(A AEI depois decide efetuar a tabela, porque observa que o aluno demora imenso tempo. Ao mesmo tempo que representa, pede indicações aos dois alunos, pois esta a registar no quadro a tabela que esse grupo construiu na sua FTA).

AEI – Todos fizeram a tabela desta forma?

Vários alunos – Não...

AEI - Primeiro & quem colocou mais do que duas colunas? (A AEI exemplifica o que são colunas) (Ninguém responde)

AEI – Todos tem duas colunas?

Vários alunos – Sim...

A5 – Nós temos três colunas.

AEI – Tem calma A5 & daqui a pouco falamos do vosso caso. Vamos centrar a nossa atenção nesta tabela.

AEI – Todos têm estas duas variáveis?

Vários alunos – Sim...

AEI – Mas eu já verifiquei & e quase todos tem de outra forma. Qual?

Vários alunos – Ao contrário...

A6 – Segmentos daquele lado e partes deste.

AEI – Podes chegar aqui à frente & por favor. E explica porque fizeram assim?

A4 (aluna do mesmo grupo que a A6) – Porque

AEI – A4 & a Carolina vai explicar & tem calma.

A6 – Porque ahm <

AEI – Porque razão & tu e a maioria dos alunos & colocaram na primeira coluna “segmentos de reta” e na segunda coluna “partes”?

A6 – Porque os segmentos de ahm para sabermos o número de partes & temos de saber quantos segmentos de reta é que estão aqui (A A6 ao mesmo tempo que explica indica na tabela).

AEI – Muito bem. Todos perceberam a explicação da A6?

Vários alunos – Sim...

AEI – Dependendo do número de segmentos é que vamos obter as partes. Não vamos escrever da direita para a esquerda & mas sim da esquerda para a direita. É tal e qual

como na escrita & da esquerda para a direita. Por exemplo & com 1 segmento obtenho duas partes & com dois segmentos de reta obtenho 4 partes e assim sucessivamente. Desta forma & a nossa forma de raciocínio seria: com duas partes temos dois segmentos e não é isso que acontece neste caso. A forma de organização é muito importante na interpretação de resultados & daí que este grupo sentiu imensas dificuldades quando eu formulei questões durante o desenvolvimento do vosso trabalho. Esta forma de organização dos dados é confusa.

(A AEI indicou vários exemplos deste grupo, que demonstravam que estavam confusos, evidenciados durante o desenvolvimento do trabalho)

(A AEI reorganiza e representa de novo a tabela de forma menos confusa e mais precisa)

AEI – Agora & olhando para esta nova tabela & não julgam ser mais fácil interpretar os dados?

Vários alunos – Sim...

AEI - A organização da tabela deve ser precisa e rigorosa?

Vários alunos – Sim...

A21 – Nós colocamos número de segmentos e número de partes.

AEI – Já vamos falar sobre isso também & calma.

AEI – Todos perceberam que a forma de organização é muito importante para o nosso raciocínio.

(A AEI indicou novamente um exemplo do grupo que estava confuso devido à organização da tabela daquela forma)

(A AEI volta a salientar que ninguém corrige)

AEI – Agora em relação às duas variáveis. A21 & o que temos nesta coluna & será mesmo segmentos de reta?

A21 – Sim

AEI – Temos segmentos de reta? & Eu vejo aqui números.

A4 – Número de segmentos de reta.

AEI – Ah & assim está melhor. De facto não temos segmentos de reta & mas sim número de segmentos de reta.

(A AEI altera na tabela representada no quadro)

(A AEI volta a salientar que ninguém corrige)

AEI – Desta forma é mais preciso ou da outra forma?

Vários alunos – Desta... Número de segmentos de reta...

AEI – E quanto às partes. Temos mesmo partes?

A6 – Número de partes que está dividida ahm

AEI – Número de partes obtidas & fica mais correto.

(A AEI escreve no quadro)

A5 – Se fosse segmentos de reta & teríamos de fazer segmentos de reta e não números

AEI – Exatamente & a organização e a designação dos termos escolhidos tem de ser clara & caso contrário & o professor não percebe quando está a corrigir os vossos trabalhos.

(A AEI solicita que os alunos que estão à frente se sentem, chama o A5 e solicita que traga a sua folha)

AEI – O grupo do A5 decidiu introduzir mais uma coluna. O que colocaram na nova coluna?

A5 – Coloquei este uhm que é este ahm

AEI – Mostra e explica aos teus colegas.

Guilherme – Coloquei este e que é este ahm

AEI – Ou seja & acrescentaram mais uma coluna com intuito de tornar os dados mais claros & precisos e compreensíveis. Eles fizeram uma outra coluna com o esquema & ou seja & para o primeiro caso & por exemplo & representaram um segmento e duas partes obtidas.

AEI – Mas falta qualquer coisa nesta coluna. O que é?

A12 – O título da coluna.

AEI – Exatamente & agora vamos todos pensar num título adequado para esta coluna.

...

(Muitos alunos sugerem títulos, mas não são perceptíveis, pois estão todos a falar em simultâneo. A AEI sugere que os alunos falem um de cada vez)

AEI – A21 & qual é a tua sugestão?

A21 – Representação dos segmentos de reta

AEI – Com esse título basta representar segmentos de reta & como este exemplo (A AEI representa vários segmentos de reta no quadro) É isto que pretendemos?

Vários alunos – Não...

A1 – Folhas com segmentos de reta

AEI – Estamos a trabalhar com folhas?

A1 – Tiras

Vários alunos – Tiras com segmentos de reta...

A23 – Devia ser tira & tira com segmentos de reta

A1 – Pois é & uma em cada uma & por isso deve ser tira

AEI – É uma tira?

A1 – Sim sim & é uma em cada

Vários alunos – Tira de segmentos de reta...

AEI – Tira de segmentos de reta? Ou tira com diferente número de segmentos de reta?

Vários alunos – Isso & sim...

(A AEI escreve na tabela e explica vários exemplos)

AEI – Perceberam?

Vários alunos – Sim...

AEI – Devemos ser sempre o mais claro e preciso & possível. Este grupo acrescentou mais uma coluna & só que deveriam ser mais precisos. Muito bem.

(Pede que o A5 se sente e sugere que dois elementos de outro grupo dirijam-se à frente: A23 e A10)

(A AEI chama a atenção ao A12, pois verifica que este está a corrigir na FTA. Frisa de novo, que não quer que ninguém corrija nenhum item da FTA e solicita que o aluno guarde todo o material de escrita)

(A AEI lê o item 3 e solicita que o A10 responda)

A10 – Nós multi ahm multiplicámos & ahm o 8 vezes dois e obtemos o 16.

AEI – Porque & explica por que razão fizeram dessa forma?

(O A10 não responde)

AEI – Porque é que não fizeram 3×8 ?

David – Porque <

(O A10 não responde, nem a A23 – colega do grupo)

AEI – A6?

A6 – Porque sempre que nas outras ahm não & porque as partes uhm é o dobro dos segmentos de reta.

AEI – As partes são o dobro dos segmentos de reta? Para ser mais preciso & A21 tenta lá.

A21 – Os segmentos de reta ahm <

AEI – Os segmentos ou o número de segmentos?

A21 – O número de segmentos de reta é o dobro das partes

A23 – O quê?

AEI – Alguém quer ajudar o A21? Todos concordam com o A21?

A23 – Não & as partes é que são o dobro dos segmentos.

AEI – Mais precisa & A23?

A23 – O número de partes é o dobro dos segmentos

AEI – O número de partes obtidas é sempre o dobro do número de segmentos de reta.

AEI – O número de partes obtidas depende de quê?

A6 – Do número de segmentos de reta.

AEI – Muito bem & do número de segmentos de reta. Ou seja & se eu quero saber o número de partes obtidas & tenho de saber o número de segmentos.

AEI – A3 & se eu tiver 10 segmentos de reta & quantas partes vou obter?

A3 – 20

AEI – Muito bem & A18 & se eu tiver 100 segmentos de reta & quantas partes vou obter?

(A A18 não consegue responder, mesmo após a AEI repetir a questão)

AEI – A8?

A8 – 200?

AEI – Muito bem & todos perceberam?

Vários alunos – Sim...

AEI – As partes são sempre mais que o número de segmentos.

(A AEI exemplifica alguns casos)

AEI – Então se tivermos 100 segmentos & vamos ter mais ou menos partes & A18?

A18 – Mais partes.

AEI – Vou formular outra questão & A18. Se eu tiver 20 segmentos de reta & quantas partes vou obter?

A18 – 40

AEI – Muito bem. Todos perceberam até aqui. Temos de avançar.

AEI – Vamos então recapitular qual é a regra. A regra que podemos concluir é que o número de partes depende sempre do número de segmentos & o número de partes é sempre metade ou o dobro do número de segmentos de reta?

A6 – meta ahm o dobro.

AEI – A4 & se eu tiver 6 segmentos quantas partes vou obter?

A4 – 12

AEI – 12 & é sempre o dobro.

AEI – Agora & vou perguntar & ao A10. Se eu tiver & ouve bem & 10 partes & quantos segmentos de reta é que eu tinha que traçar?

A10 – 10 partes & cinco.

AEI – Muito bem A10. A15 & se eu tiver 8 partes quantos segmentos de reta eu teria de traçar?

A15 – 4

AEI – Muito bem & todos perceberam?

Vários alunos – Sim...

AEI – Então & vamos avançar.

AEI – Em relação & a outra questão & que é um pouco mais complexa & relacionada com a regra. Para um número qualquer de partes & vamos dar a letra n & se eu quiser saber o número de partes & o que eu vou ter que fazer?

A12 – Metade ahm não & o dobro

AEI – Esta é uma forma de apresentar a regra

(A AEI escreve no quadro “ $2 \times n = n^\circ$ de partes obtidas” sendo que n é o número de segmentos traçados)

AEI – Como o exemplo de há pouco & se tens 100 segmentos obtemos 200 partes & porque vamos multiplicar o número de segmentos por 2. O que representa o resultado & A19 (A AEI aponta para o quadro)

A19 – Partes

AEI – O número de partes & muito bem. Todos perceberam?

...

AEI – Isto é uma forma de exemplificar a regra. Repito mais uma vez & ninguém corrige. Quem escreveu por palavras & também está correto. A maioria dos alunos julgo ter feito por palavras. Vamos avançar para a próxima.

A AEI lê a próxima questão (item 5) depois chama o A12 à frente e solicita que represente o primeiro caso: com três segmentos de reta)

AEI – Vamos clarificar um pouco esta questão & pois é um pouco longa. O objetivo é obter um número máximo de partes & com uma disposição diferente dos segmentos de reta. Na descoberta anterior tínhamos uma condição & qual era A13?

A13 – Traçar todos pelo mesmo ponto.

AEI – E nesta é necessário passar todos pelo mesmo ponto?

Vários alunos – Não...

AEI – Vamos tentar dispor os segmentos de reta & de forma a obter um número máximo de partes. Podemos verificar pela representação do vosso colega que obtemos 7 partes. Todos obtiveram este resultado?

A23 – Não

Vários alunos – Sim...

AEI – O número máximo de partes obtidas é 7. Algum grupo conseguiu um maior número?

Vários alunos – Não

AEI – E está correto & o número máximo de partes obtidas com 3 segmentos de reta & nesta nova descoberta & é 7.

AEI – Próxima & A13 vem ao quadro representar. Tenta representar por cima da representação que está feita. Se aqui temos 3 segmentos & falta apenas 1 segmento.

A13 – Mas eu tenho os segmentos representados de uma forma diferente.

AEI – Antes de continuar & algum grupo conseguiu perceber qual é a condição fundamental & para obter o número máximo de partes & ao representar os segmentos de reta? Ou fizeram por tentativa e erro?

A12 – Têm de passar por todos os segmentos.

A23 – Sim & têm de passar por todos os segmentos.

AEI – Muito bem meninos & e agora neste caso & como vamos fazer para conseguir passar por todos os segmentos de reta? O novo segmento & isto está indicado no enunciado & só que os meninos não tomaram atenção ao ler as questões & passa por todos os segmentos anteriores traçados. Ou seja & vamos traçar um segmento de reta & que intersete todos os segmentos anteriores.

AEI – Agora vamos lá contar & quantas partes obtemos. Podes sentar-te A13. Antes de contar vou perguntar a cada grupo quantas partes obtiveram?

Grupo 1 – 10

Grupo 2 – 10

Grupo 3 – 10

Grupo 4 – 11

Grupo 5 – 10

AEI – Não percebo como o grupo do A12 & percebeu o raciocínio e obtiveram 10 partes. A resposta certa é 11. Vamos contar. Alguém recorreu a alguma estratégia para contar as partes obtidas & e não se enganar? Talvez foi o que aconteceu com o grupo A12. Devemos recorrer a uma estratégia para a contagem & para não nos enganarmos.

A12 qual foi a vossa estratégia?

A12 – ahm & posso ir ao quadro?

AEI – Não & explica por tuas palavras.

A12 – ahm ahm

AEI – A24?

A24 – Coloco os números.

AEI – Colocas os números onde?

A24 – Em cada parte

AEI – Em cada parte. Vamos então proceder à contagem. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
(A AEI realiza a contagem, em conjunto com os alunos, e regista o número de partes obtidas em cada parte, no quadro).

AEI- Provavelmente nem todos os alunos conseguiram chegar a este resultado. Muitos grupos obtiveram dez partes & ou porque fizeram mal a contagem ou porque não conseguiram traçar os segmentos da forma correta & pois este processo não é um processo muito fácil. Com um maior número de segmentos & o processo é cada vez mais complexo.

...

AEI – Agora vamos tentar fazer com cinco segmentos. Antes de tentar & quantas partes é que conseguiram neste caso. Vamos recapitular. Com 1 segmento obtivemos?

(A AEI ao mesmo tempo que recapitula, escreve os dados no quadro)

Vários alunos - Duas partes...

AEI - Com 2 segmentos?

Vários alunos – 4 partes...

AEI – Com 3?

Vários alunos – 6...

Outros alunos – 7...

AEI – 7. Com quatro segmentos?

Vários alunos – 16...

AEI – Quatro segmentos?

Vários alunos – 11...

...

A5 - com 5 <

A8 - 16

AEI –A18 por que razão dizes que com 5 segmentos obtemos 16 partes?

A18 – 2 para 4 é 2 uhm 4 para 7 é 3 uhm 7 para 11 é 4 uhm 11 para 16 é 5

AEI - Será que o A18 fez agora uma descoberta? Alguém pensou da mesma forma que o A18?

(Ninguém responde)

AEI – Muito bem A18

AEI- Vamos agora testar a “teoria” do A18.

A10 – Com quatro & consegui 12

AEI – Será que algo não estará errado? Vamos analisar.

A10 – Já percebi & tem aqui um espaço a mais

(O AE Fábio observou e ajudou o aluno a perceber que tinha feito algo mal)

AEI – Vamos então avançar & pois a resposta é 11. Voltando ao raciocínio do A8.

Todos perceberam o raciocínio do A8?

Vários alunos – Sim...

AEI – Vamos agora tentar representar para este caso. Quem quer tentar?

Vários alunos – Eu...

AEI – Vai ser o nosso matemático A8.

...

(O A10 volta a ter dúvidas e a AEI esclarece, frisando que este aluno iria fazer uma descoberta nunca antes feita por nenhum matemático. Enquanto isso o aluno A8 tenta fazer o esquema no quadro, com 5 segmentos de reta)

AEI – Vou ensinar qual é a estratégia para ser mais fácil o traçar os segmentos de reta.

A10 – O A21 sabe.

AEI – A21 & queres vir tentar? Anda ao quadro. Faz e explica. Primeiro traça 1 segmento.

(O A21 representa os segmentos)

AEI – Não existe segmentos de reta curvos.

A21 – Eu não vou fazer mais nenhum assim.

AEI – Dessa forma obténs 16 partes?

A21 – Sim

AEI – Estou a verificar que o A21 está com algumas dificuldades. Este processo não é fácil & por isso vou representar.

A21 – Aqui no quadro é mais difícil.

(Os alunos (entusiasmados) pedem para ir ao quadro tentar, porém a AEI diz que não, dado que o tempo disponível é reduzido)

AEI - Vocês explicam e eu faço & ok?

Vários alunos – Sim...

AEI – Primeiro representamos a tira de papel. Depois o que faço A1?

...

(A AEI repete que não quer que nenhum aluno corrija as questões)

AEI – Recapitulando & primeiro represento um segmento & depois outro & e o próximo como deverá ser traçado? A6?

A6 - vai ter de acontecer ahm

AEI – Vamos lá ajudar & A12. O que vai acontecer ao próximo segmento de reta que eu traçar?

A12 – Passar por todos

AEI – Intersectar em todos os segmentos anteriores & muito bem & A12.

(A AEI representa o segmento de reta a intersectar os anteriores)

AEI – E o próximo?

A12 – Agora também terá de passar por todos os anteriores

(A AEI representa o quarto segmento segundo a condição referida pelo A12)

(Os alunos, em simultâneo que a AEI representa, fazem comentários: tá bem, não, não, etc)

AEI – E o próximo?

A6 – Também de passar por todos os anteriores.

A AEI representa o último segmento com alguma dificuldade.

AEI – Vamos agora fazer a contagem.

(A AEI, em conjunto com os alunos, fazem a contagem, só que uma parte, não é muito perceptível. Mediante esta situação, a AEI recorre à apresentação em *PowerPoint* para ser mais perceptível, pois já previa esta situação. Explica novamente, que representar com um determinado número de segmentos torna-se um processo muito complexo)

...

(A AEI inicia a apresentação em *PowerPoint*. Apresenta para todos os casos, por ordem crescente, do número de segmentos de reta, primeiramente a partir de esquema e depois a partir de uma tabela, para a questão inicial da TI)

Depois apresenta para todos os casos por ordem crescente do número de segmentos de reta, para a segunda situação da TI. Primeiro em esquema. Os alunos ficam surpreendidos com a forma de apresentação, pois aparece um ponto de cada vez, para representar as partes obtidas. Todos fazem a contagem das partes, à medida que aparecem os pontos)

...

AEI – Todos os alunos perceberam que o fundamental & nesta situação & é interseção todos os segmentos traçados anteriormente.

(Como o tempo é curto, a AEI explora os restantes itens da TI a partir da apresentação em *PowerPoint*. O próximo item era relativo à construção da tabela)

AEI – A tabela para esta situação será semelhante à da situação anterior ou muito distinta?

A12 – Muito distinta

...

AEI – Será?

A12 – Segmentos de reta e partes. Certo?

AEI – Segmentos de reta?

Vários alunos – Número de segmentos de reta...

AEI – Exatamente

AEI – E aqui meninos? (A AEI aponta para a 2ª coluna)

A6 – Número de partes obtidas

AEI – Para ser mais preciso & o que acham de “número máximo de partes obtidas”?

Vários alunos – Sim...

(A AEI escreve na tabela)

A AEI frisa que podiam acrescentar mais uma coluna, à semelhança do grupo do A5, com o esquema)

...

AEI – E agora & com 7 segmentos de reta? Quem quer tentar?

(Os alunos pensam um pouco)

AEI – A1?

A1 – 15

AEI – 15. Com 5 segmentos obtemos 16 partes e com 7 segmentos obtemos 15? Vamos lá pensar com calma.

...

(Mais uma vez os alunos pensam na questão formulada)

AEI – Quem quer tentar?

A6 – Eu

AEI – Diz lá A6.

A6 – 22.

AEI – Outras opiniões?

A10 – 29

A23 – Eu também digo 29

AEI – Vou aceitar mais uma sugestão? A13?

A13 – 27

AEI – Antes de verificarmos com 7 segmentos & talvez seja melhor verificar com 6.

Vários alunos – Sim...

AEI - Então & quantas partes obtemos com 6 segmentos de reta?

A12 – 22

AEI – Porquê?

A23 – Porque é mais 6

A10 – Então com 7 segmentos é mais 7 & e é igual a 29 & yes.

AEI – Muito bem A10 & verifiquei que alguns alunos referiram 29 e é a resposta certa para o caso de 7 segmentos de reta. Todos perceberam o raciocínio?

(A AEI discute outras respostas e a sua invalidez. Os alunos percebem rapidamente que estavam errados e alguns deles nem conseguiam explicar porque optaram por determinado número de partes.

AEI – Por último & qual é a regra que podemos concluir nesta situação?

A12 - Já sei

AEI – Diz lá.

(O aluno depois não refere nada e a AEI faculta mais algum tempo para pensarem)

(Os alunos pensam durante algum tempo)

A6 – Temos de pensar antes de falar.

AEI – Muito bem & quando não têm as vossas ideias organizadas não falem. Quando tiverem o raciocínio organizado levantam o braço e depois dou autorização para falar. O exemplo mais ilustrativo é o do A6 & está constantemente a referir já sei & e depois dou-lhe a palavra e ele não diz nada.

AEI – Se não sabem uma regra & descrevam o que fizeram e como fizeram para descobrir com 7 segmentos & por exemplo. A1?

...

(O aluno não responde)

AEI – Vamos recapitular. O que acontece do 1º caso para o 2º caso & A4?

A4 – É o dobro.

AEI – E do segundo para o terceiro?

A4 – É mais dois.

AEI – Todos concordam que $4 + 2$ é igual a 7?

A12 – Não

AEI – O que foi que aconteceu A6 & nos diferentes casos?

A6 – Do 2 para o 4 são + dois

AEI – No 1º caso & para o 2º caso?

A6 e vários alunos – Foi + 2

A6 – Foi sempre mais 2 & porque do 2º caso para o 3º foi + 3 uhm & do 3º para o 4º foi mais 4 uhm & do 4º para o 5º foi + 5 uhm & do 5º para o 6º foi mais 6.

(Em simultâneo, a Carolina explica e a AEI indica na tabela)

A8 – (O A8 faz outra descoberta) ali também pode ser $2+1, 3; 2+2, 4; 4+3, 7$

AEI – Muito bem A8. O vosso colega conseguiu verificar outra regularidade.

(A AEI elogia o aluno, pois este aluno está frequentemente distraído. Se não fosse a distração obtinha, certamente, melhores resultados nas suas aprendizagens. A AEI depois explora a descoberta do aluno, em conjunto, a partir da tabela construída com os dados)

(Toca o toque de saída e a AEI refere que têm de concluir a tarefa)

AEI – Vamos agora à conclusão & com uma regra.

A5 – O número de partes obtidas anteriormente + n?

AEI – Muito bem & podemos então concluir que este processo é de recorrência & ou seja & precisamos sempre de obter o número de partes do caso anterior.

...

AEI – Vou perguntar novamente, se eu quero descobrir este resultado, o que é que eu tenho que fazer? (A AEI aponta para um caso)

(A AEI refere o exemplo e depois solicita que A20 explique o caso)

A20 – é 11, porque é o nº de uhm partes obtidas ahm

AEI – Mais o n, e neste caso quanto é o n?

A20 – é 5

AEI – E qual é o resultado?

A20 – 17

A12 – AEI & posso dizer uma coisa?

AEI – Vem cá a frente.

A12 – Aqui $1+2$ é 3; $3+1$ é 4; $4+2$ é 6; $6+1$ é 7; $7+3$ é 10; $10+1$ é 11; $11 + 4$ é 15; $15+1$ é 16

AEI – Agora resume qual foi a tua estratégia? Tenta dizer essa regra?

(O A12 não consegue explicar o seu raciocínio)

AEI – O A12 pensou assim: Somar o número de partes obtidas anteriormente, mais o número de segmentos, atribuído a essas partes, mais um. É um raciocínio mais complexo, mas também correto. O A12 tem de conseguir explicar para a próxima.

AEI - Todos perceberam o raciocínio do A12?

Vários alunos – Sim...

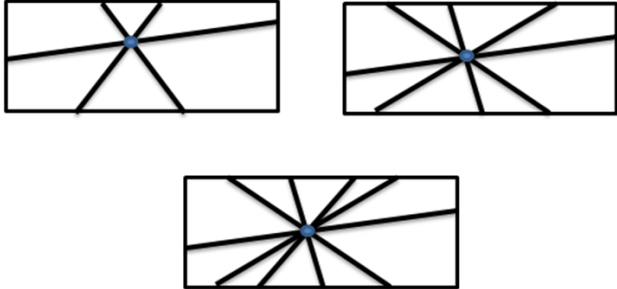
(Fim da discussão. A AEI teve obrigatoriamente de interromper a discussão, pois os alunos tinham de ir a intervalo. A última regra não foi explorada o suficiente)

Apêndice H

Apresentação em *PowerPoint* usada na Sessão 2

Apresentação PowerPoint usada na Sessão 2

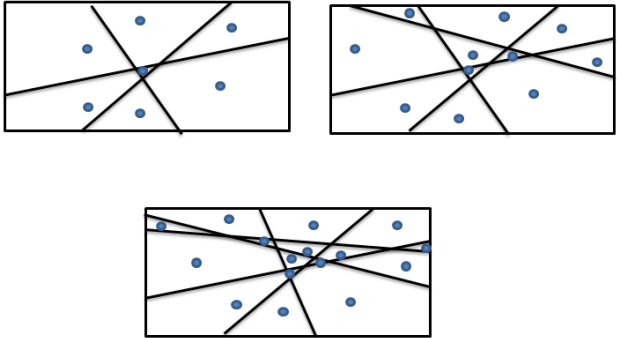
Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel



Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel

Nº de segmentos de reta	Nº de partes obtidas
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
8	16
n	$n \times 2$

Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel



Vamos ajudar o Miguel a dividir tiras de papel

Nº de segmentos de reta	Nº de partes obtidas
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
8	37
n	Nº partes obtidas anteriormente + n

Referências Bibliográficas

- Amaral, N., Carreira, S. e Amado, N. (2010). A resolução de problemas e a comunicação matemática para além da sala de aula: como vêm os alunos o uso das tecnologias? In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 287-303). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Bardin, L. (1991). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Baroody, A. e Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: constructing adaptive expertise*. New Jersey: Lawrence Erlbaum. [Disponível em http://www.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=w-wfTH5hAncC&oi=fnd&pg=PA1&dq=Problem+solving,+reasoning,+and+communicating,+K-8:+Helping+children+think+mathematically&ots=6kbtvUW4sS&sig=LremhqMG3oI0AnY0PeUGofzKqs4&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false] (Acedido em 4 de janeiro de 2012)
- Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. [Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/02braumann.pdf>] (Acedido em 10 de janeiro de 2012).
- Brendefur, J. e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153. [Disponível em <http://www.springerlink.com/content/x24k36u575552635/>] (Acedido em 05 de janeiro de 2012).
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano*, Tese de doutoramento. Lisboa: Universidade de Lisboa. [Disponível em <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/310>] (Acedido em 11 de dezembro de 2011).
- Boavida, A. e Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In L. Santos (ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM. [Disponível em

- <http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/1144>] (Acedido em 20 de janeiro de 2013).
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. e Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico – programa de formação contínua em matemática para professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução às teorias e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Cabrita, I. (coord.), Coelho, A., Vieira, C., Malta, E., Vizinho, I., Almeida, J., Gaspar, J., Pinheiro, J., Nunes, M., Sousa, O. e Amaral, P. (2010). *Experiências de aprendizagem matemática significantes*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Cabrita, I. e Fonseca, L. (2012). Capacidades transversais em educação em matemática. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre e C. Nunes (orgs.), *Actas do XXIII de investigação em educação matemática* (pp. 539-544). Lisboa: APM. [Disponível em <http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/1144>] (Acedido em 21 de janeiro de 2013).
- Cabrita, I. (coord.), Pinheiro, L. Pinheiro, J. e Sousa, O. (2008). *Novas trajectórias em matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Carmo, H. e Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação. Guia para a auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Carvalho, A., Gaio, A., Ribeiro, D., Nunes, F., Veloso, G., Valério, N., Almeida, P., Mestre, R. e Canário, S. (2011). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade*. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.
- Correia, L. (2005). *Aprender matemática – hoje: ensino básico*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Corradi, D. (2011). Investigações matemáticas. *Revista da Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto*, I, (162-175). [Disponível em <http://www.redumat.ufop.br/2011/C25.pdf>] (Acedido em 20 de janeiro de 2013)
- Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Coimbra: Almedina.
- Cunha, H., Oliveira, H. e Ponte, J. (1995). Investigações matemáticas na sala de aula. In A. Pinheiro, A. P. Canavarro (eds.), *Actas do ProfMat 95* (pp. 161-168). Lisboa: APM. [Disponível em

- <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto4.PDF>] (Acedido em 30 de janeiro de 2012).
- Diezmann, C., Watters, J. e English, L. (2001). Implementing mathematical investigations with young children. [Disponível em <http://eprints.qut.edu.au/1505/1/1505.pdf>] (Acedido em 15 de janeiro de 2012).
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Leal e J. Ponte (orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Fartura, S. (2007). *Aprendizagem baseada em problemas orientada para o pensamento crítico*. Dissertação de mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Fonseca, H., Brunheira, L. e Ponte, J. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. [Disponível em http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2007%202008/gestao%20sala%20de%20aula/Texto_Actividades%20de%20investiga%C3%A7%C3%A3o.pdf] (Acedido em 15 de novembro de 2011).
- Freiman, V. e Lirette-Pitre (2009). Connected giftedness. Mathematical problem solving by means of a web technology: case of the CASMI Project. In Sriraman, B., Freiman, V. e Lirette-Pitre (eds.), *Interdisciplinarity, creativity, and learning: mathematics with literature, paradoxes, history, technology and modeling* (pp. 205-216). Montana: Information Age Publishing.
- Frota, M. (2005). Experiência matemática e investigação matemática. [Disponível em <http://www.matematica.pucminas.br/Grupo%20de%20Trabalho/Maria%20clara/experienciaDocumento%20do%20Acrobat.pdf>] (Acedido em 20 de outubro de 2012).
- Gabinete de Avaliação Educacional (2011). Terminologia adoptada na classificação de itens de instrumentos de avaliação externa. [Disponível em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=393&fileName=Terminologia_Itens.pdf] (Acedido em 12 de janeiro de 2013).
- González, F. (2005). La educación matemática en educación básica: retos y perspectivas desde latinoamérica. In H. Guimarães e L. Serrazina (orgs.), *V CIBEM* (pp. 37-70). Porto: APM.
- Guerreiro, A. (2010). O papel do outro (aluno) na comunicação matemática: práticas de uma professora do 1.º ciclo. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino*

- e na aprendizagem da matemática* (pp. 211-223). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Guerreiro, A. e Menezes, L. (2010). Comunicação matemática: na busca de um entendimento comum. In H. Gomes, L. Menezes e I. Cabrita (orgs.), *Actas do XII Seminário de investigação em educação matemática* (pp.137-143). Lisboa: APM.
- Guimarães, H. (2003). Algumas dicotomias no ensino e aprendizagem da matemática. In Conselho Nacional de Educação (org.), *O ensino da matemática: situações e perspectivas* (pp. 89-100). Lisboa: Ministério da Educação.
- Henriques, A. e Ponte, J. (2008). Actividades de investigação na aprendizagem de análise numérica. *Revista da Educação*, 16 (2), 5-32. [Disponível em <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9915/3/MHM-CIBEM.pdf>] (Acedido em 5 de outubro de 2012).
- Henriques, A. e Ponte, J. (2010). A comunicação matemática no contexto de actividades de investigação: o uso de representações matemáticas. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 320-335). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Martinho, M. e Ponte, J. (2005). A comunicação na sala de aula de Matemática: um campo de desenvolvimento profissional do professor. [Disponível em <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9915/3/MHM-CIBEM.pdf>] (Acedido em 5 de Novembro de 2011).
- Medeiros, K. (2010). Negociação de significados: as práticas de duas futuras professoras de matemática. In H. Gomes, L. Menezes e I. Cabrita (orgs.), *Actas do XII Seminário de investigação em educação matemática* (pp.226-239). Lisboa: APM.
- Medeiros, K. e Ponte, J. (2010). Explicar e negociar significados: as concepções e as práticas de uma candidata a professora de matemática. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 196-210). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. e Gonçalves, F. (2010). *Números e Operações: 3º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

- Menezes, L. (2000). Matemática, linguagem e comunicação. In APM (ed.), *Actas do ProfMat 99* (pp. 123-145). Portimão: APM. [Disponível em <http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/899>] (Acedido em 1 de novembro 2011).
- Menezes, L. (2010). Concepções sobre a comunicação matemática de uma futura professora. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 238-253). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2010). *Metas de aprendizagem*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2012). *Metas de aprendizagem*. Lisboa: Ministério da Educação.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Olegário, A., Faoro, V., Nehring, C. e Pozzobon (2009). Aprendendo matemática através de investigações – vivência com o ensino médio. [Disponível em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_15.pdf] (Acedido em 4 de julho 2012).
- Oliveira, H., Segurado, I. e Ponte, J. (1998). Tarefas de investigação em matemática: histórias da sala de aula. [Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto10.PDF>] (Acedido em 2 de dezembro 2011).
- Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. e Cunha, M. (1997). Investigações matemáticas na sala de aula: um projecto colaborativo. [Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto11.PDF>] (Acedido em 2 de dezembro 2011).
- Palhares, P. (coord.) (2004). *Elementos de matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.
- Pedrosa, M. (2000). A comunicação na sala de aula: as perguntas como elementos estruturadores da interacção didáctica. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. Ponte, J. Matos, e L. Menezes (orgs.), *Interacções na aula de Matemática*. (pp. 149-161). Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

- Pinto, F. e Santos, L. (2010). A comunicação em sala de aula no desenvolvimento de uma tarefa de natureza exploratória. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 87-101). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Ponte, J. (2003a). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169. [Disponível em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Rev-SPCE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf)] (Acedido em 7 de dezembro de 2011).
- Ponte, J. (2003b). O ensino da matemática em Portugal: uma prioridade educativa?. In Conselho Nacional de Educação (org.), *O ensino da matemática: situações e perspectivas* (pp. 21-46). Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.
- Ponte, J. (2009). Novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interacções*, 12, 96-114. [Disponível em <http://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/340/1/L7.pdf>] (Acedido em 10 de novembro de 2011).
- Ponte, J. (2010) Explorar e investigar em matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión*, 21, 13-30. [Disponível em http://www.fisem.org/descargas/21/Union_021_006.pdf] (Acedido em 30 de outubro 2011).
- Ponte, J., Brocardo, J. e Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ponte, J., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L. e Viseu, F. (2008). A comunicação nas práticas de jovens professores de matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20 (2), 39-74. [Disponível em <http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/1162>] (Acedido em 7 de dezembro de 2011).
- Ponte, J. e Serrazina, L. (2009). O novo programa de matemática: uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 2-6. [Disponível em

- <https://www1.esec.pt/pagina/fcmat/documentos/NPMatematicaoportunidade mudanca.pdf>] (Acedido em 10 de novembro de 2012).
- Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Porfírio, J. e Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111- 118). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Reis, L. (2003). Ensino e aprendizagem da matemática: pontos críticos. In Conselho Nacional de Educação (org.), *O Ensino da matemática: situações e perspectivas* (pp. 101-110). Lisboa: Ministério da Educação.
- Ribeiro, C. e Carrillo, J. (2010). Práticas comunicativas de uma professora de matemática. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 224-237). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Rodrigues, M. (2010). O processo de demonstrar na aula de matemática: um olhar sobre a comunicação emergente. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 24-50). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Romão, M. (2000). O papel da comunicação na aprendizagem da matemática. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. Ponte, J. Matos e L. Menezes (orgs.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 163-177). Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Sá, E. (2003). Alguns pontos críticos no ensino da matemática. In Conselho Nacional de Educação (org.), *O Ensino da Matemática: situações e perspectivas* (pp.69-87). Lisboa: Ministério da Educação.
- Sanchez, L. (2003). Programas e metodologias no ensino da matemática. In Conselho Nacional de Educação (org.), *O ensino da matemática: situações e perspectivas* (pp. 61-67). Lisboa: Ministério da Educação.
- Segurado, I. e Ponte, J. (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7, 5-40. [Disponível em

- <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C98-Segurado-Ponte%20%28Quadrante%29.pdf>] (Acedido em 31 de outubro de 2011).
- Skovsmose, O. (2000). Cenários de investigação. *BOLEMA*, 14, 69-91. [Disponível em <http://sem.spce.org.pt/01Ole.pdf>] (Acedido em 20 de dezembro de 2011).
- Sousa, A. (2009). *Investigação em Educação* (2ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.
- Sousa, F., Cebolo, V., Alves, B. e Mamede, E. (2009). Comunicação matemática: contributos do PCFM na reflexão das práticas de professores. [Disponível em http://www.apm.pt/files/_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf] (Acedido em 4 de outubro de 2012).
- Souza, R., e Ponte, J. (2012). Comunicação matemática na sala de aula dos anos iniciais: contributos de um programa de formação. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre e C. Nunes (orgs.), *Actas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 545-556). Coimbra: APM. [Disponível em http://www.apm.pt/files/_XXIII_SIEM_ATAAS_Nov2012_50acf58f39318.pdf] (Acedido em 29 de janeiro de 2013)
- Tenbrink, T. (1984). *Evaluacion: guia practica para profesores* (2ª ed.). Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.
- Tenreiro-Vieira, C., Nogueira, S. e Cabrita, I. (2010a). Propostas didáticas potenciadoras de conexões entre matemática e ciências em contextos de educação formal e não formal – contributos do processo de validação. In J. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. Teixeira (eds.), *Investigação em educação matemática: comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 151-167). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Tenreiro-Vieira, C., Nogueira, S. e Cabrita, I. (2010b). Representações de alunos sobre o domínio de capacidades matemáticas. In H. Gomes, L. Menezes e I. Cabrita (orgs.), *Actas XII do Seminário de investigação em educação matemática* (pp. 387-400). Lisboa: APM.
- Tenreiro-Vieira, C. e Vieira, R. (2004). Gestão e articulação de dimensões do currículo de matemática por professores do 1º CEB: impacte de um programa de um programa de formação. *Revista de Educação*, 12(1), 49-61.
- Zabala, J. (2008). *3²-2 ideas chave: el desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.